h 変換された一次元広義拡散過程の大域的性質

富崎　松代（奈良女子大学　理学部）
嶽村　智子（奈良女子大学　人間文化研究科）

2009．3.26

$\boxed{\text{1. h変換}}$

$$
\begin{aligned}
X &: \text{区間 } I = (l_1, l_2) \text{ 上での一次元広義拡散過程} \\
s &: \text{尺度関数} \\
m &: \text{スピード測度関数} \\
k &: \text{消滅測度関数} \\
\mathcal{G}_{s,m,k} &: X \text{ の作用素}
\end{aligned}
$$

次のような関数空間を考える.

$$\mathcal{H}^*_{s,m,k,\beta} = \{\ h \mid \mathcal{G}_{s,m,k}h = \beta h,\ h > 0\}, \quad \beta \geq 0$$

Remark.

$$\mathcal{H}^*_{s,m,k,\beta} \neq \emptyset$$

$$p(t,x,y): X \text{ の } m \text{ に関する推移確率密度関数}$$

$h \in \mathcal{H}^*_{s,m,k,\beta}$ に対して,

$$p^*(t,x,y) = e^{-\beta t}\frac{p(t,x,y)}{h(x)h(y)}$$

とおく.

known result s_h, m_h を次のように定義する.

$$s_h(x) = \int_c^x h(x)^{-2}\,ds(x), \quad m_h(x) = \int_c^x h(x)^2\,dm(x), \quad (\ c \in I\ ).$$

Y を $G_{s_h,m_h,0}$ を生成作用素とする一次元広義拡散過程とすると,
p^* は Y の m_h に関する推移確率密度である.

$h \in \mathcal{H}^*_{s,m,k,\beta}$ に対して,

$$H^*_h: \mathcal{G}_{s,m,k} \mapsto \mathcal{G}_{s_h,m_h,0} \ (H^*\mathcal{G}_{s,m,k} = \mathcal{G}_{s_h,m_h,0})$$

前野　みゆき(2005)

$$\mathcal{H}^o_{s,m,0} = \{h \mid \mathcal{G}_{s,m,0}h \le 0,\ h > 0\}, \quad (\mathcal{H}^o_{s,m,0} \neq \emptyset)$$

$h \in \mathcal{H}^o_{s,m,0}$ に対して

$$p^o(t,x,y) = \frac{p(t,x,y)}{h(x)h(y)}.$$

Z : X のh変換

$p^o(t,x,y)$: Z の dm_h に関する確率密度関数.

$\mathcal{G}_{s_h,m_h,k_h}$: Z の作用素, $(dk_h = -hdD_sh)$

$h \in \mathcal{H}^o_{s,m,0}$ に対して, $H^o_h: \mathcal{G}_{s,m,0} \mapsto \mathcal{G}_{s_h,m_h,k_h}$ とおく.

Remark.

$$\mathcal{H}^*_{s,m,0,0} \subset \mathcal{H}^o_{s,m,0}$$

$h \in \mathcal{H}^*_{s,m,0,0}$ に対して $H^o_h \mathcal{G}_{s,m,0} = H^*_h \mathcal{G}_{s,m,0}$

$k \neq 0$ または $\beta > 0$ ならば $\mathcal{H}^o_{s,m,0} \cap \mathcal{H}^*_{s,m,k,\beta} = \emptyset$

Proposition.

(i) $h \in \mathcal{H}^*_{s,m,k,\beta} \Rightarrow h^{-1} \in \mathcal{H}^o_{s_h,m_h,0}$, $H^o_{h^{-1}} H^*_h \mathcal{G}_{s,m,k} = \mathcal{G}_{s,m,k+\beta m}$

特に,

$$\beta = 0 \Rightarrow H^o_{h^{-1}} H^*_h \mathcal{G}_{s,m,k} = \mathcal{G}_{s,m,k}$$

(ii) $h \in \mathcal{H}^o_{s,m,0} \Rightarrow h^{-1} \in \mathcal{H}^*_{s_h,m_h,k_h,0}$, $H^*_{h^{-1}} H^o_h \mathcal{G}_{s,m,0} = \mathcal{G}_{s,m,0}$

2. h変換された作用素の再帰性と過渡性

G : $\mathcal{G}_{s,m,k}$ 全体の集合

再帰性・過渡性

$$G^R = \{\mathcal{G}_{s,m,k} : k = 0,\ s(l_1) = -\infty,\ s(l_2) = \infty\}$$
$$G^T = G \setminus G^R$$

Proposition.

(i) $\mathcal{G}_{s,m,0} \in G^R \Rightarrow \mathcal{H}^o_{s,m,0} = \mathcal{H}^*_{s,m,0,0} = \{$正定数関数$\}$.

(ii) $\mathcal{G}_{s,m,0} \in G^R,\ h \in \mathcal{H}^*_{s,m,0,\beta}\quad \beta > 0 \Rightarrow H^*_h\mathcal{G}_{s,m,0} \in G^T$

(iii) $\mathcal{G}_{s,m,k} \in G^T,\ h \in \mathcal{H}^*_{s,m,k,\beta},\ \beta \geq 0 \Rightarrow H^*_h\mathcal{G}_{s,m,k} \in G^T$

3．h変換された過程の境界の性質

Theorem. $h \in \mathcal{H}^*_{s,m,k,\beta}$

	$h(l_i) = 0$	$h(l_i) \in (0,\infty)$	$h(l_i) = \infty$
(s,m,k) -regular	$(s_h, m_h, 0)$ -entrance	$(s_h, m_h, 0)$ -regular	———
(s,m,k) -exit	$(s_h, m_h, 0)$ -entrance	$(s_h, m_h, 0)$ -exit	———
(s,m,k) -entrance	———	$(s_h, m_h, 0)$ -entrance	$(s_h, m_h, 0)$ -regular if $\lvert m_h(l_i)\rvert < \infty$ $(s_h, m_h, 0)$ -exit if $\lvert m_h(l_i)\rvert = \infty$
(s,m,k) -natural	$(s_h, m_h, 0)$ -entrance if $J_{m_h,s_h}(l_i) < \infty$ $(s_h, m_h, 0)$ -natural if $J_{m_h,s_h}(l_i) = \infty$	———	$(s_h, m_h, 0)$ -exit if $J_{s_h,m_h}(l_i) < \infty$ $(s_h, m_h, 0)$ -natural if $J_{s_h,m_h}(l_i) = \infty$

4. 例

$$\mathcal{G}_{s,m,k} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} - \frac{a^2 - 2^{-2}}{2x^2}, \quad x > 0, \quad a > 2^{-1}$$
$$ds(x) = dx,\ dm(x) = 2\,dx,\ dk(x) = (a^2 - 2^{-2})x^{-2}\,dx.$$

$h(x) = \sqrt{x}K_a(x\sqrt{2\beta})$ とする．$h \in \mathcal{H}^*_{s,m,k,\beta}$

$$\Rightarrow H_h^* \mathcal{G}_{s,m,k} = \mathcal{G}_{s_h,m_h,0} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{1}{2x} + \frac{\sqrt{2\beta}K_a'(x\sqrt{2\beta})}{K_a(x\sqrt{2\beta})}\right)\frac{d}{dx},$$
$$ds_h(x) = \frac{dx}{xK_a^2(x\sqrt{2\beta})}, \quad dm_h(x) = 2xK_a^2(x\sqrt{2\beta})\,dx.$$

Remark.

原点：natural $\to$ exit