2007年　9月21日　北海道大学

シナプスが時間変化する ニューラルネットワークモデルの 定常状態の解析Ⅱ

奈良女院　阿部　啓
奈良女院　上江洌　達也
神戸高専　三好　誠司
東大院　岡田　真人

内容

I. Introduction
II. モデル
III. 数値解析
IV. まとめ

I. INTRODUCTION

ニューロンとシナプス荷重のダブルダイナミックス

Partial Annealing

ニューロンとシナプス荷重が共に変化する。
シナプス荷重に比べて、ニューロンの変化が非常に速い極限を解析する。

↓

シナプスが有意に変化する前に、ニューロンは（準）平衡状態になっている。

　シナプス荷重は、ニューロンの発火状態を用いたヘブ的な学習、あるいは反学習を行う。

　十分時間が経過して定常状態に達したときの、ニューロンの発火状態やシナプス荷重について解析する。

　ここでは、

Hopfield model に Partial Annealing を行い、
もとの Hopfield model との比較を行う。

Ⅱ．モデル

時間発展則

J_{ij} ：シナプス結合荷重： $i, j = 1, \cdots, N$

σ_i ：ニューロン： $i = 1, \cdots, N$

$$\tau \frac{d}{dt} J_{ij} = \frac{1}{N} (\varepsilon \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\mathrm{sp}} + K_{ij}) - \mu J_{ij} + \eta_{ij}(t) \sqrt{\frac{\tau}{N}} \ , \ i, j = 1, \cdots, N$$

η_{ij} : **White Gaussian variable**

平均　**0**　共分散 $\langle \eta_{ij}(t) \eta_{kl}(t') \rangle = 2\tilde{T} \delta_{ik} \delta_{jl} \delta(t - t')$

$$\tau \frac{d}{dt} J_{ij} = \frac{1}{N}\left(\varepsilon \left\langle \sigma_i \sigma_j \right\rangle_{\mathrm{sp}} + K_{ij}\right) - \mu J_{ij} + \eta_{ij}(t)\sqrt{\frac{\tau}{N}} \ , \ i, j = 1, \cdots, N$$

$$\left\langle \sigma_i \sigma_j \right\rangle_{\mathrm{sp}} = \frac{1}{Z_\beta} \mathrm{Tr}_{\{\sigma\}}\left(\sigma_i \sigma_j e^{-\beta H(\{\sigma\})}\right)$$

$$H(\{\sigma\}) = -\sum_{i<j} J_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

$$Z_\beta = \mathrm{Tr}_{\{\sigma\}} e^{-\beta H(\{\sigma\})}$$

$$\tau \frac{d}{dt} J_{ij} = -\frac{1}{N} \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial J_{ij}} + \eta_{ij}(t)\sqrt{\frac{\tau}{N}}$$

$$\mathrm{H} = -\varepsilon \beta^{-1} \ln Z_\beta - \sum_{i<j} K_{ij} J_{ij} + \frac{1}{2} N \mu \sum_{i<j} J_{ij}{}^2$$

K_{ij} : Hopfield model を考える

Hopfield : $$K_{ij} = \frac{K}{\sqrt{p}} \sum_{\mu=1}^{p} \xi_i^{\mu} \xi_j^{\mu}$$

今回は、有限個のパターン

$$p = 3$$

$K > 0$ のときは、時間とシナプス荷重のスケール変換で、
$\tau = 1,\ K = 1$ とおいてよい。

定常状態

$$P(\{J_{ij}\}) = \frac{1}{\tilde{Z}_{\tilde{\beta}}} e^{-\tilde{\beta}\mathrm{H}}$$

$$\tilde{Z}_{\tilde{\beta}} = \int dJ\, Z_\beta^n \exp[\tilde{\beta} \sum_{i<j} K_{ij} J_{ij} - \frac{1}{2} N\mu \sum_{i<j} J_{ij}{}^2]$$

$$n = \varepsilon \frac{\tilde{\beta}}{\beta}$$

Z_β^n をレプリカ法により計算する。

以下では、レプリカ対称性を仮定。

オーダーパラメータ

$$q_{\alpha\beta} = \frac{1}{N}\sum_i \sigma_i^\alpha \sigma_i^\beta$$

$$m_\nu^\alpha = \frac{1}{N}\sum_i \sigma_i^\alpha \xi_i^\nu$$

RS 解

$$q_{\alpha\beta} = q$$

$$m_\nu^\alpha = m_\nu$$

鞍点方程式

$$q = \langle\langle \int Dx \cosh^n \Xi \tanh^2 \Xi \left[\int Dx \cosh^n \Xi \right]^{-1} \rangle\rangle$$

$$m_\mu = \langle\langle \xi^\mu \int Dx \cosh^n \Xi \tanh \Xi \left[\int Dx \cosh^n \Xi \right]^{-1} \rangle\rangle$$

$$\Xi = \beta \left\{ \sqrt{\frac{q}{\mu \tilde{\beta}}} x + \frac{K}{\mu \sqrt{p}} \sum_{\nu=1}^{p} m_\nu \xi^\nu \right\}$$

$\langle\langle \ \rangle\rangle$:パターン ξ についての平均

$$\int Dx = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Hopfield $(p=3)$

P : $q=0,\quad m_\mu=0$

SG : $q>0,\quad m_\mu=0$

H : $q>0,\quad m_1\neq 0,\quad m_2=m_3=0$

2M : $q>0,\quad m_1=m_2\neq 0,\quad m_3=0$

3M : $q>0,\quad m_1=m_2=m_3\neq 0$

Ⅲ．数値解析

相転移の種類（２次相転移）

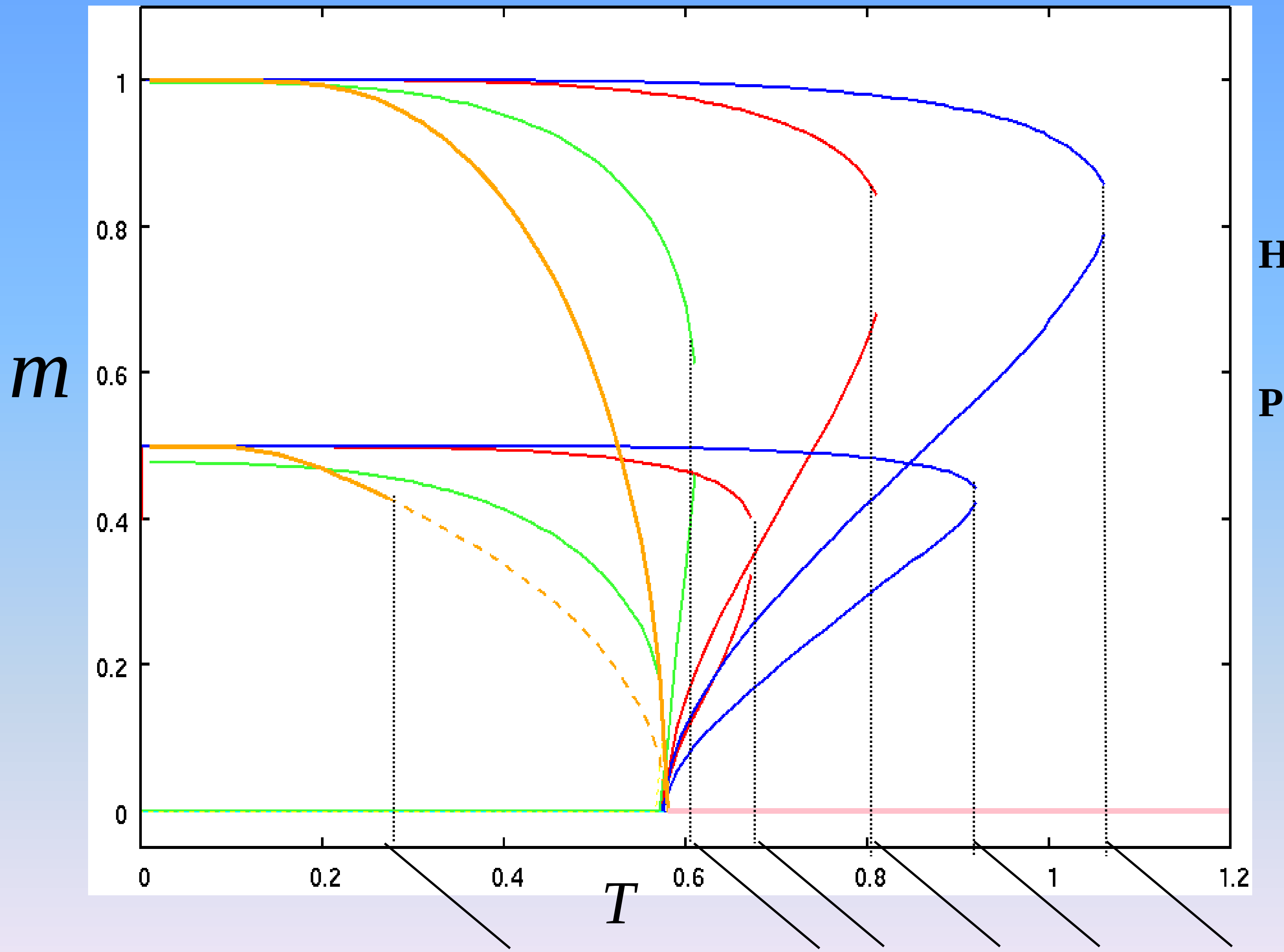
P ⟶ SG： $T_{\mathrm{C}}^{(\mathrm{P}\to\mathrm{SG})} = \sqrt{\dfrac{\tilde{T}}{\mu}}$

P ⟶ M： $T_{\mathrm{C}}^{(\mathrm{P}\to\mathrm{M})} = \dfrac{K}{\mu\sqrt{p}}$

SG ⟶ M：

$$T_{\mathrm{C}}^{(\mathrm{SG}\to\mathrm{M})} = \frac{K}{\mu\sqrt{p}}\left(1+\left(\varepsilon\frac{T_{\mathrm{C}}^{(\mathrm{SG}\to\mathrm{M})}}{\tilde{T}}-1\right)q\right)$$

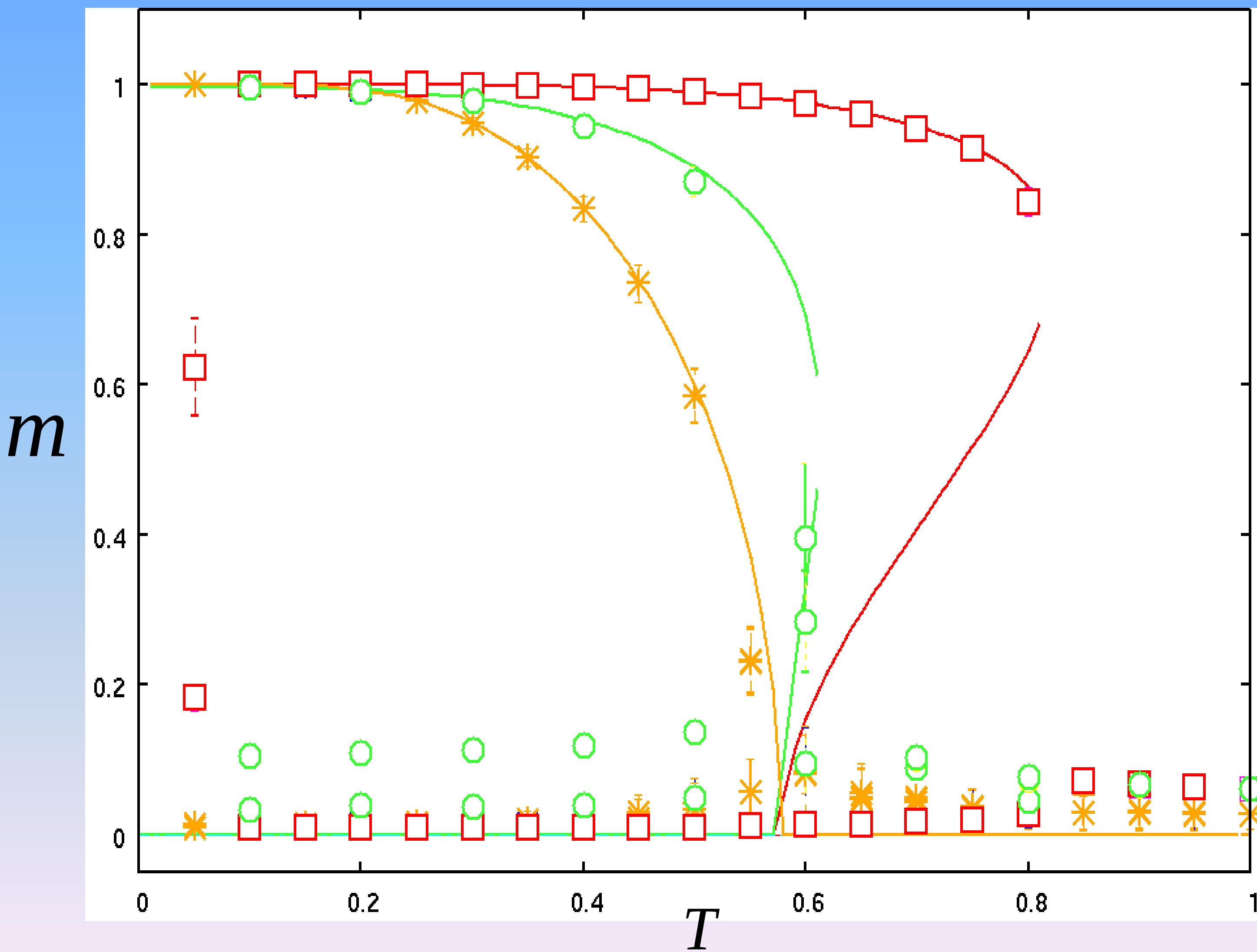
Hopfield model と Partial Annealing の理論曲線 $(\widetilde{T} = 0.1)$



3MとHの比 ・・・ Hopfield model 0.47　0.95$(\varepsilon = 0.5)$　0.82 $(\varepsilon = 1.0)$　0.86 $(\varepsilon = 1.5)$

Hopfield model と Partial Annealing の理論とシミュレーション

① H ($\tilde{T}=0.1$, $K=1$, $\mu=1$)

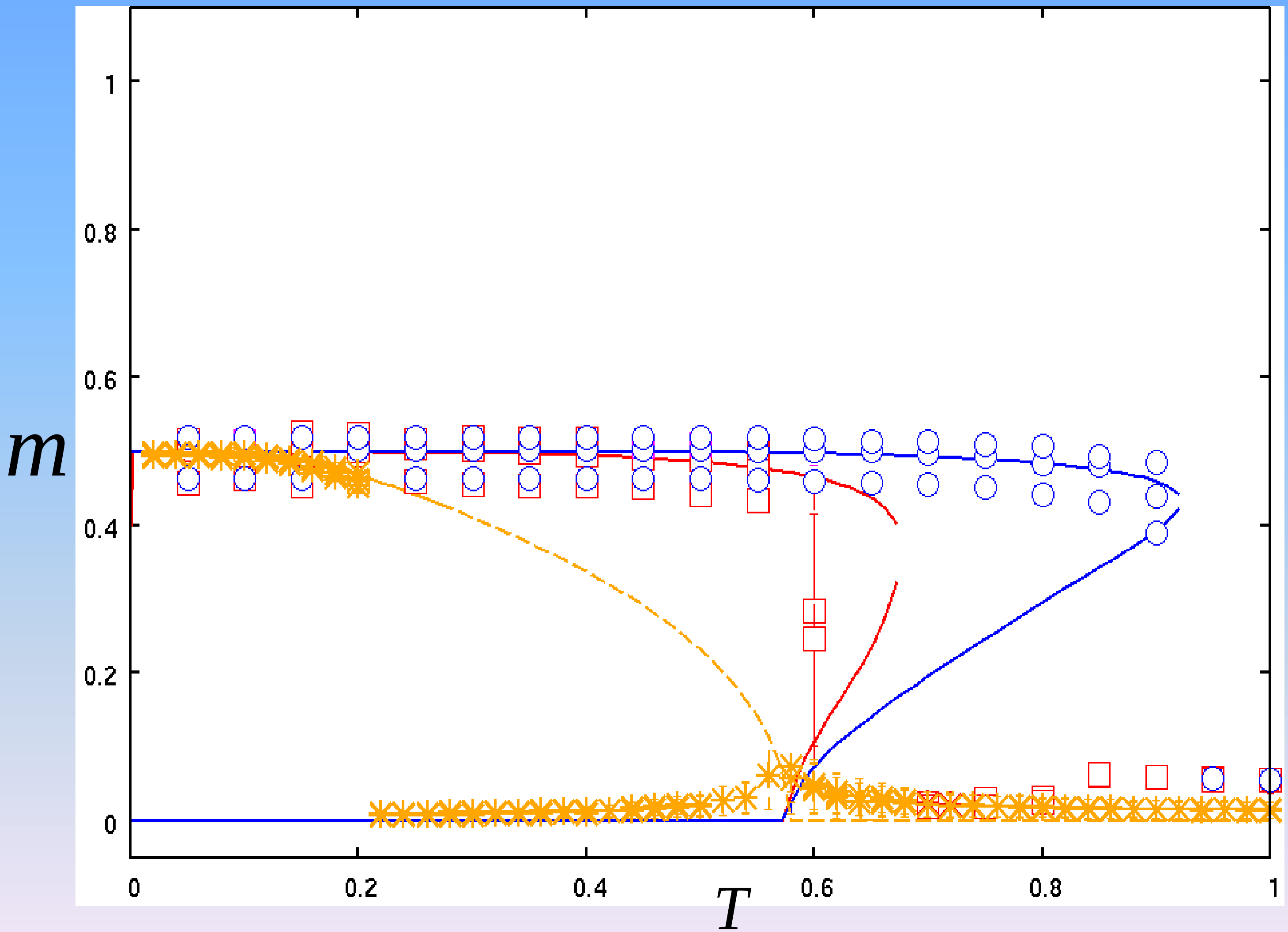


Hopfield model
オレンジ
($N=2000$)

Partial Annealing
$\varepsilon=1.0$ 赤
$\varepsilon=0.5$ 緑
($N=400$)

Hopfield model と Partial Annealing の理論とシミュレーション

① 3M　($\tilde{T}=0.1$, $K=1$, $\mu=1$)



Hopfield model

オレンジ

($N=10000$)

Partial Annealing

$\varepsilon=1.5$　**青**

$\varepsilon=1.0$　**赤**

($N=500$)

相図 ：$\tilde{T}=0.1\,,K=1\,,\,\mu=1$

●2次相転移

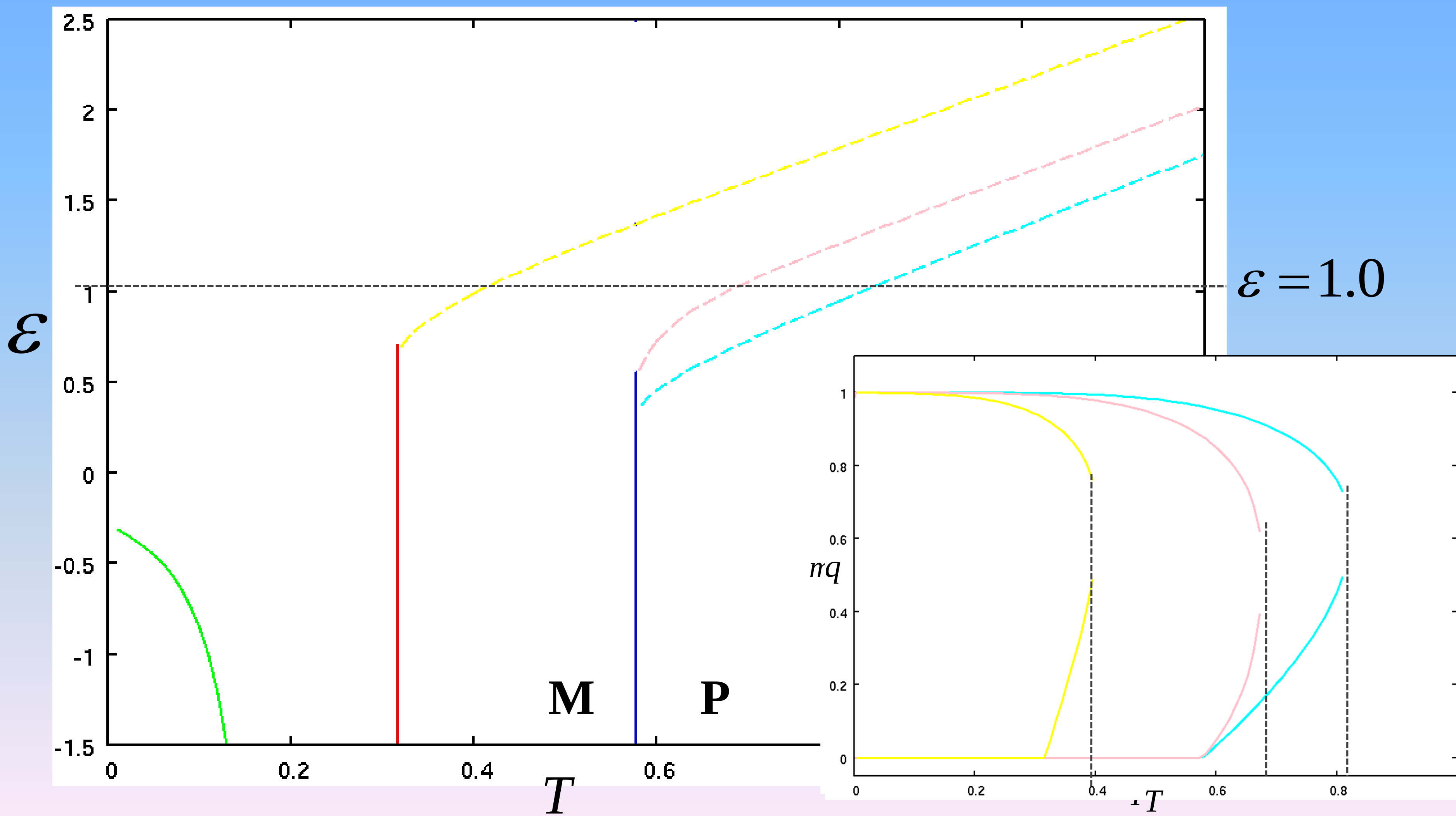
緑:SG←→ M　青:M ←→P　赤:SG←→P

●1次相転移

水色 ： H

ピンク:3M

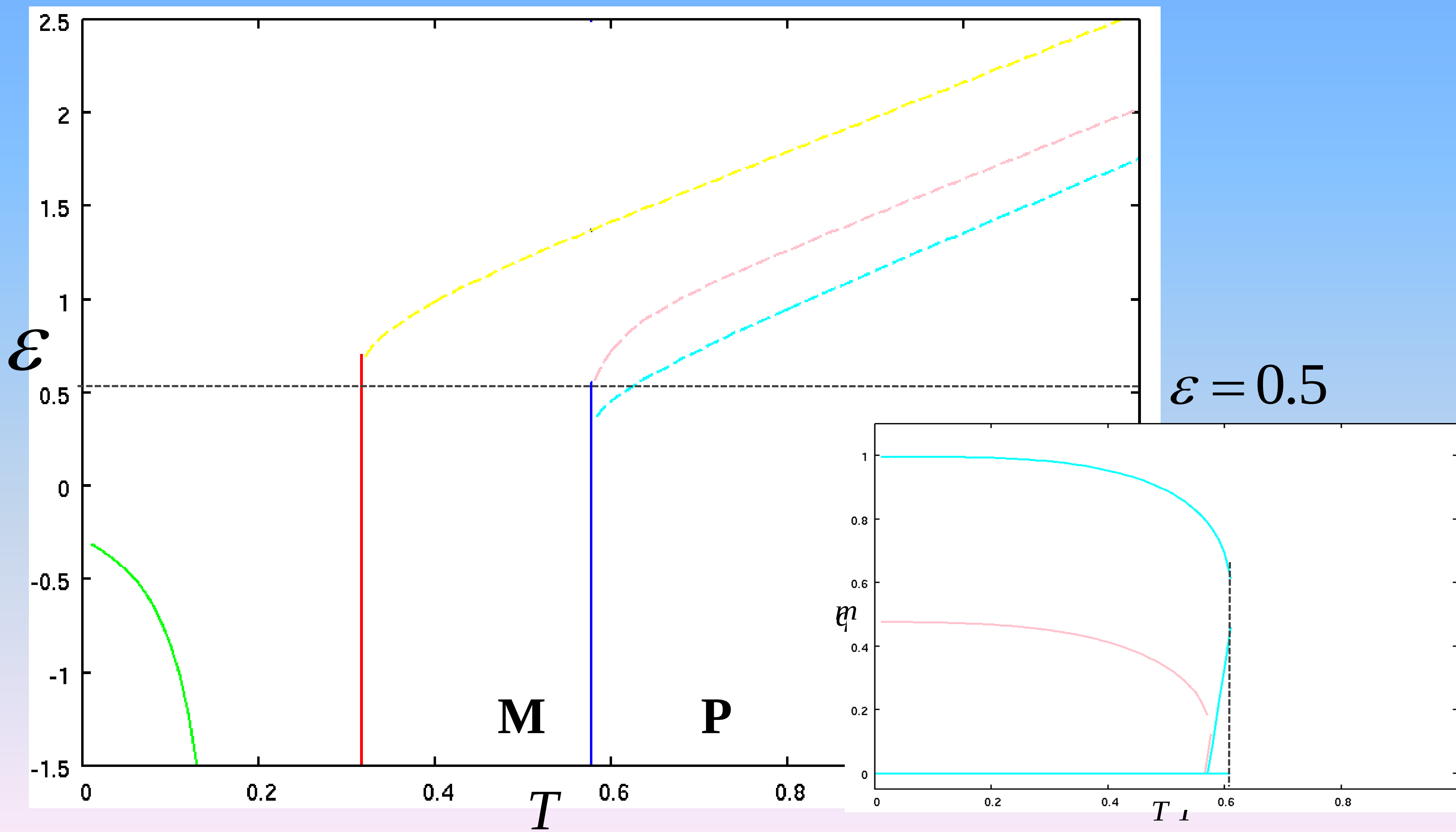
黄色 ： SG



相図 ：$\tilde{T}=0.1\,,\,K=1\,,\,\mu=1$

●1次相転移
水色 ：H
ピンク:3M
黄色 ：SG

●2次相転移
緑:SG ←→ M　青:M ←→ P　赤:SG ←→ P



Ⅳ．　まとめ

◎Hopfield model との比較（ $\tilde{T}=0.1$ で計算）

Hopfield Attractor，3M も $\mathcal{E}$ が大きくなると
安定な温度の範囲が増える

◎Hopfield model に比べて

Hopfield Attractor は
相転移の種類が変わる

$\mathcal{E}$ が小　⇒　２次相転移
$\mathcal{E}$ が大　⇒　１次相転移