調和写像とダイヤモンド格子

ーその美しさの秘密ー

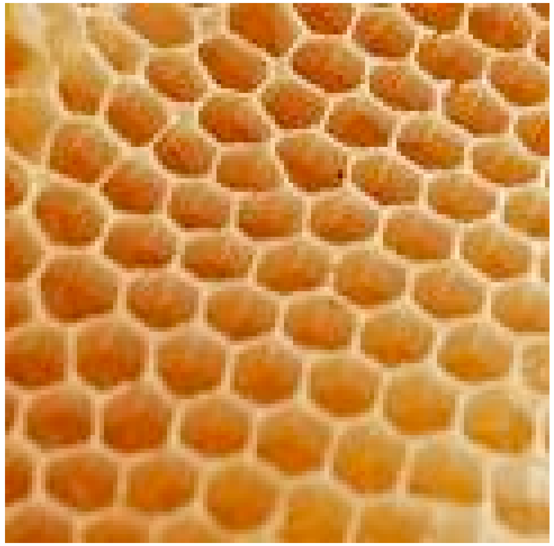
宮岡礼子（東北大学）

序

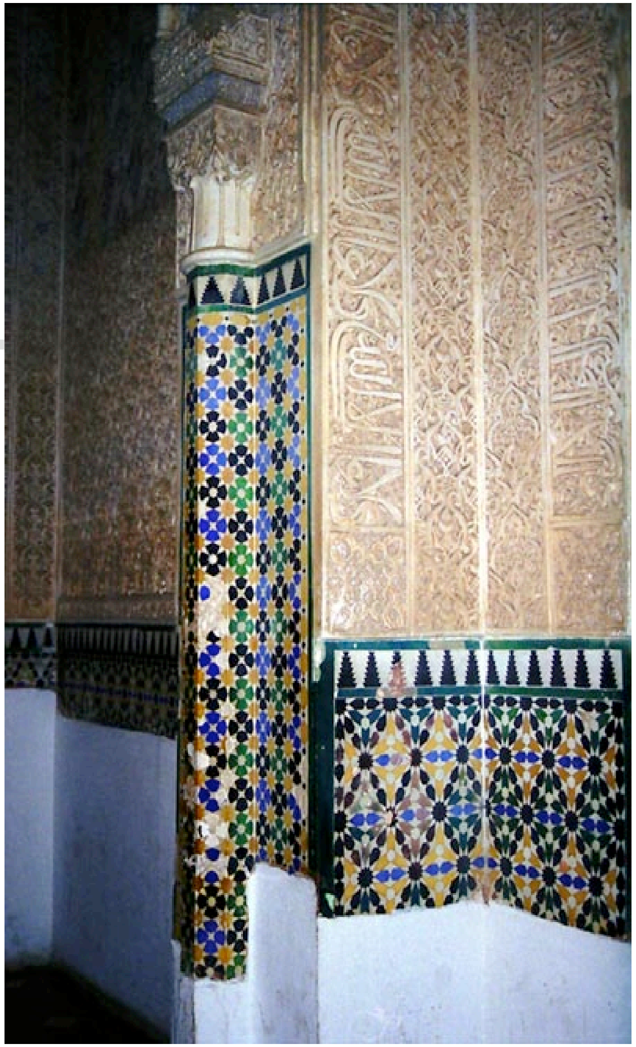
- 調和＝ハーモニー
  美しい，心地よい，安らぎ

- 自然界から　植物の蔓，巻貝の殻、蜂の巣
- 人工物から　タイル，建築物





Frei Otto



アルハンブラ宮殿

これらに共通するもの

周期性

対称性

合理性

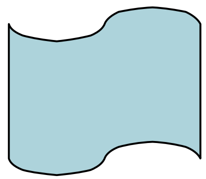
ダイヤモンドの美しさに関係している

調和写像

- エネルギーを節約する写像

(1) 1次元のエネルギー～道の長さ

(2) 2次元のエネルギー～屋根や壁の面積



変分問題

曲線族 $\{C_s\}$に対し， $L(s)$: 曲線 C_s の長さ

曲面族 $\{M_s\}$ に対し，$A(s)$: 曲面 M_sの面積

（1）　$dL(s)/ds = 0$

（2）　$dA(s)/ds = 0$

を解いて極（大・小）値を求めること

⇨　エネルギーの節約、合理性

変分問題の解のみたす典型的方程式

(1)の解は線分で，y=ax は $\dfrac{d^2}{dx^2}y=0$ を

みたす．一般に最短線を測地線という．

(2)の解を極小曲面といい，この曲面

$$p=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$$

は $(\dfrac{\partial^2}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial v^2})p=0$ をみたす．

$\triangle = \dfrac{\partial^2}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial v^2}$ をラプラシアンという

定義：　$\triangle f=0$を満たす関数を調和関数という.

$\triangle T=0$を満たす写像を調和写像という.

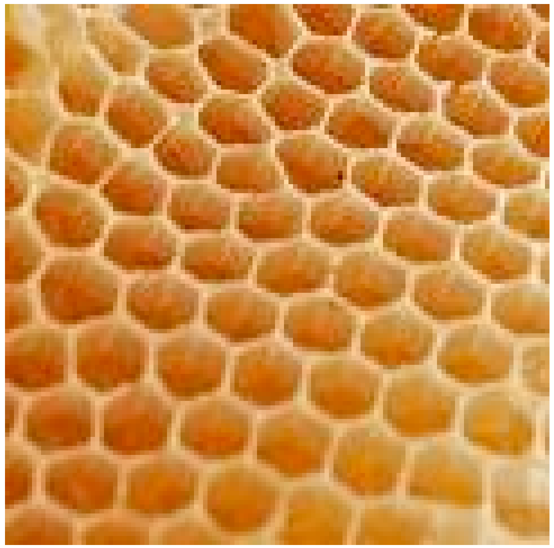
ここで T はリーマン多様体 M という，ものさしの与えられた空間からユークリッド空間 への写像.

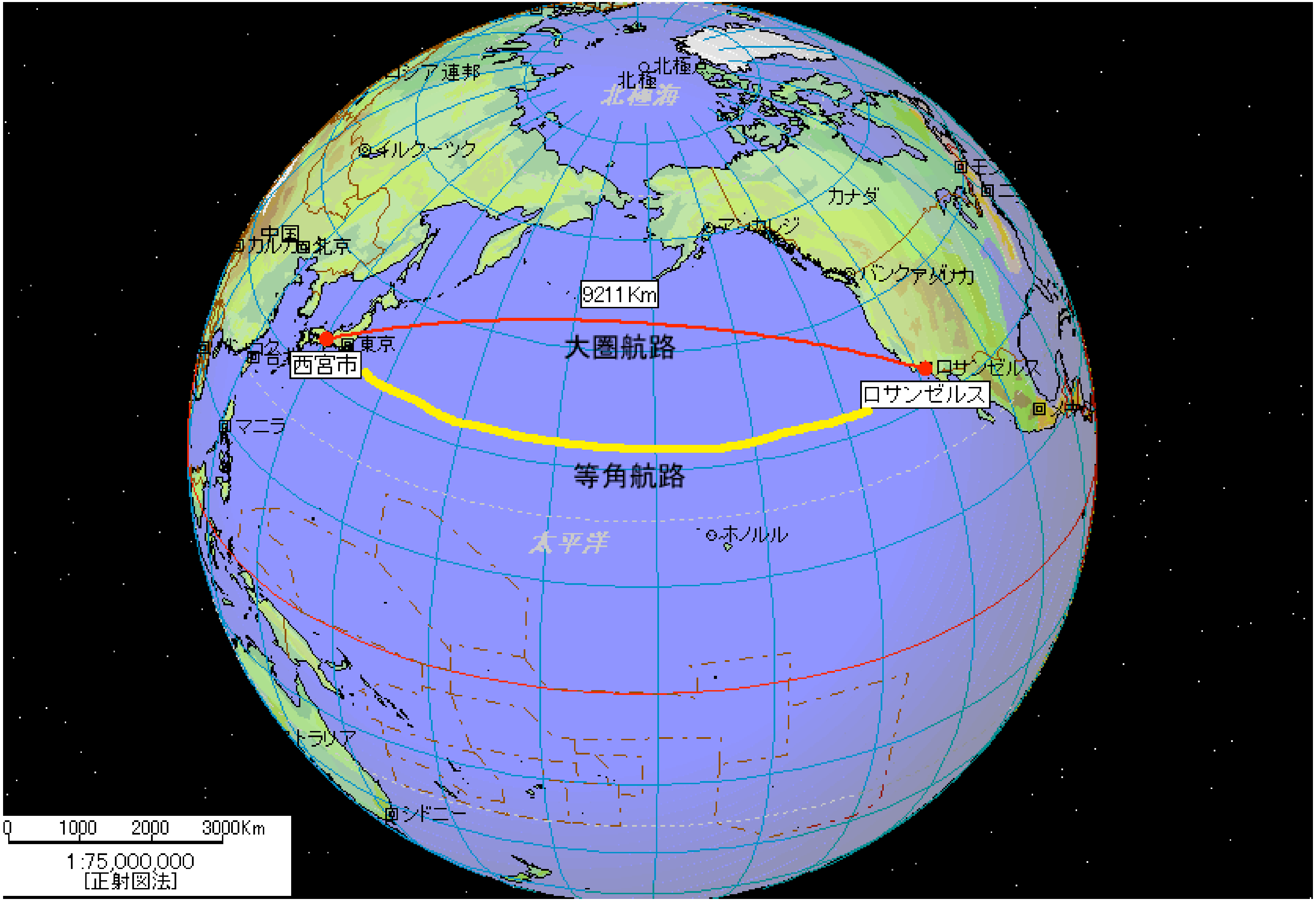
調和写像の身近な例

- 朝顔のつる
- 巻貝のから
- 飛行機の航路

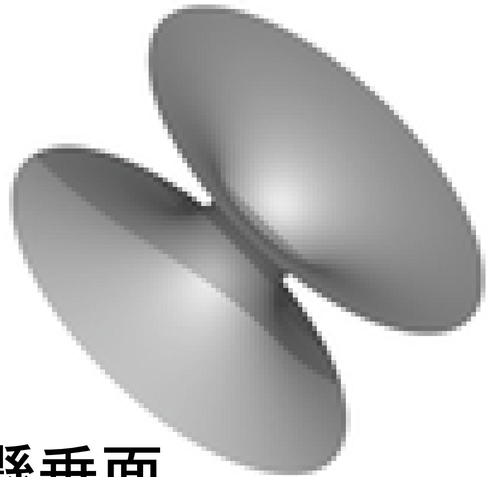
- ミュンヘンオリンピックスタジアムの屋根
- 常螺旋面





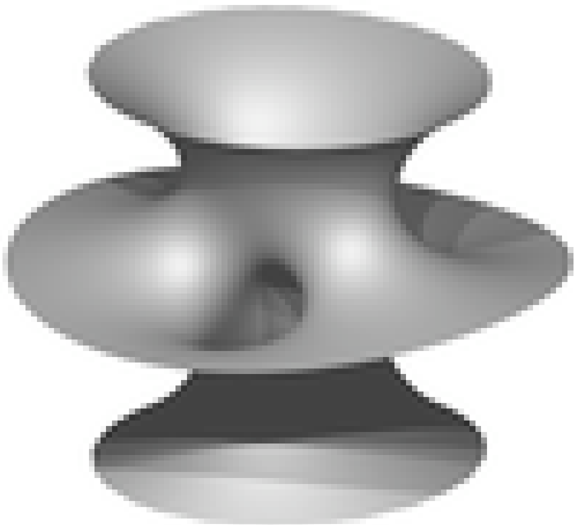

ロシア連邦
北極
北極海
イルクーツク
カナダ
中国
北京
アンカレジ
9211Km
東京
西宮市
大圏航路
ロサンゼルス
ロサンゼルス
マニラ
等角航路
ホノルル
太平洋
シドニー
0 1000 2000 3000Km
1:75,000,000
[正射図法]

極小曲面



懸垂面

常螺旋面



コスタ曲面

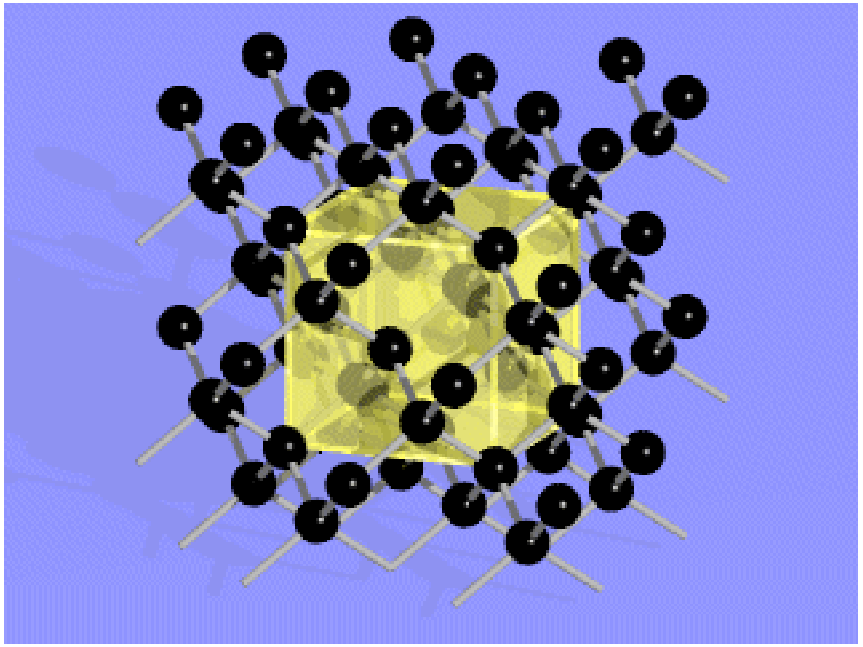
調和写像論周辺

- 実は調和写像論と可積分系理論との間にいろいろな関係がある.
- 例えばある種の極小曲面方程式は戸田方程式とよばれる可積分な方程式と深く関係している.
- 戸田方程式はいくつかつながったバネの運動を記述している.

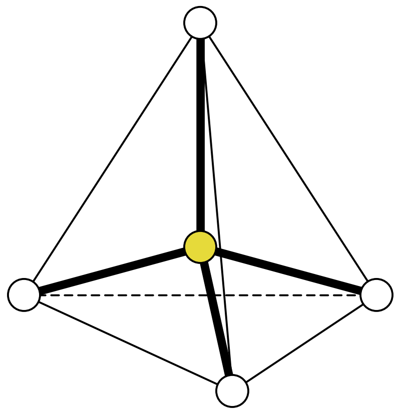
⇒ 背景に離散解析がある.

結晶格子と離散解析

ダイヤモンド格子



正四面体の重心と頂点を結ぶ図形

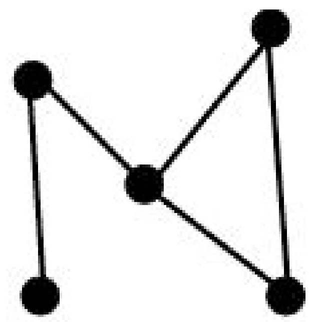


これを各辺の中点を中心とする点対称であらゆる方向に拡張したものがダイヤモンド格子.

頂点と辺からなる図形=グラフという.

グラフ

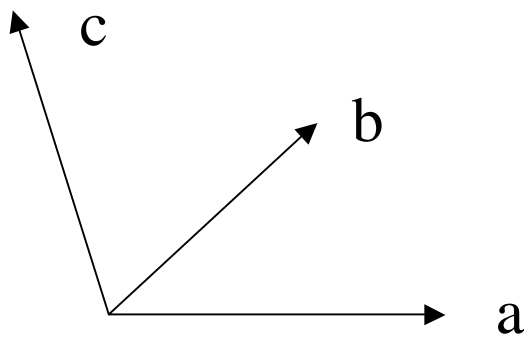
定義：グラフ X=(V,E)とは，頂点の集合 V と辺の集合 E が，その結合関係とともに与えられたものである.



その実現は様々な形をもつが，結合関係のみに注目したものを抽象的グラフという.

周期格子群

Rで３次元ユークリッド空間を表す.
a, b, c を R の独立なベクトルとして,
整数 i,j,k に対して ia+jb+kc で決まる
平行移動全体の作る群 L を周期格子群と
いう.



平面の場合は
L={ ia+jb}

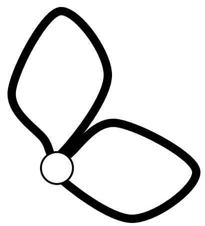
結晶格子とはなにか？

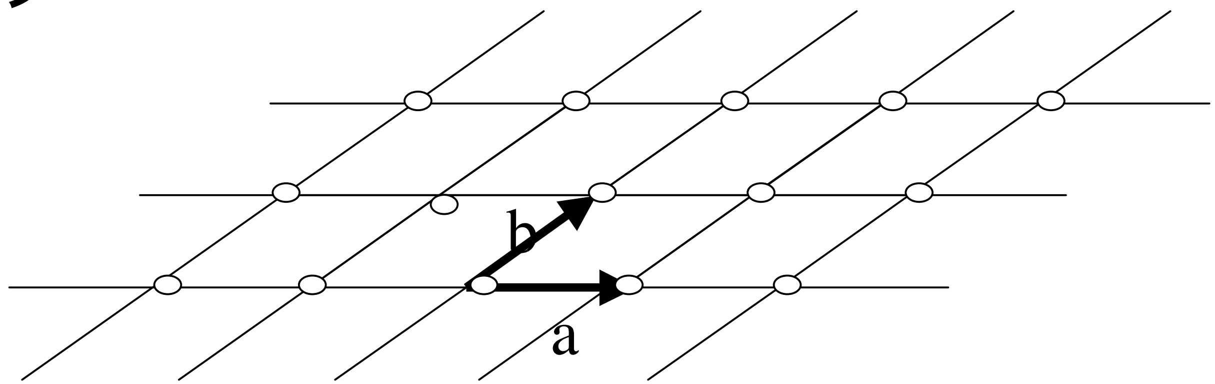
グラフ X の実現を $T : X \longrightarrow R$ とする.

このとき，周期格子群 L が T(X) を不変にしているならば,つまり T(X) が平行移動で不変ならば,この実現を周期的実現という.

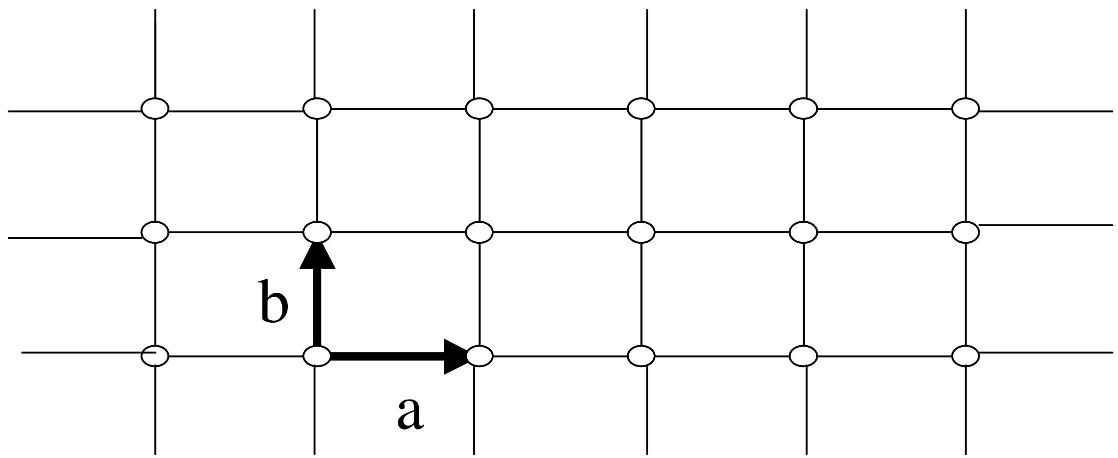
周期的実現を持つ抽象的グラフを結晶格子という.

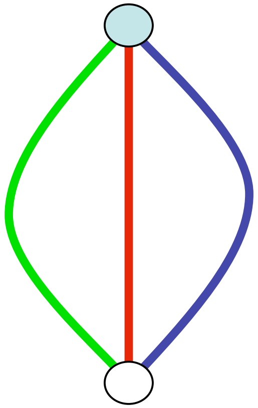
抽象グラフ

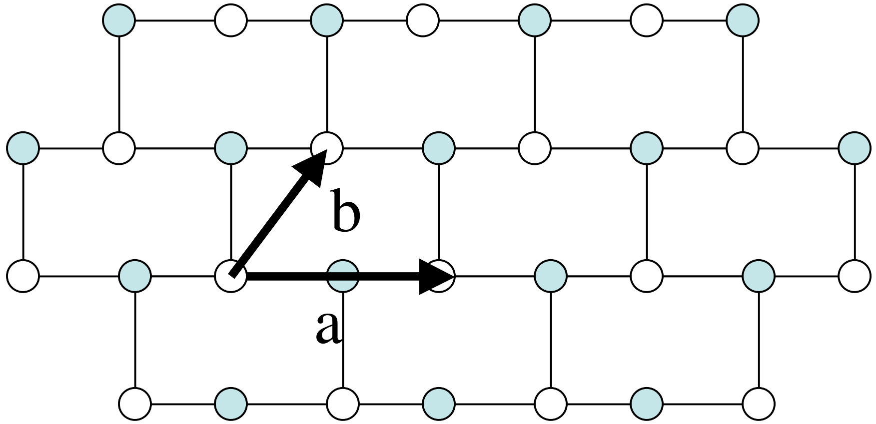




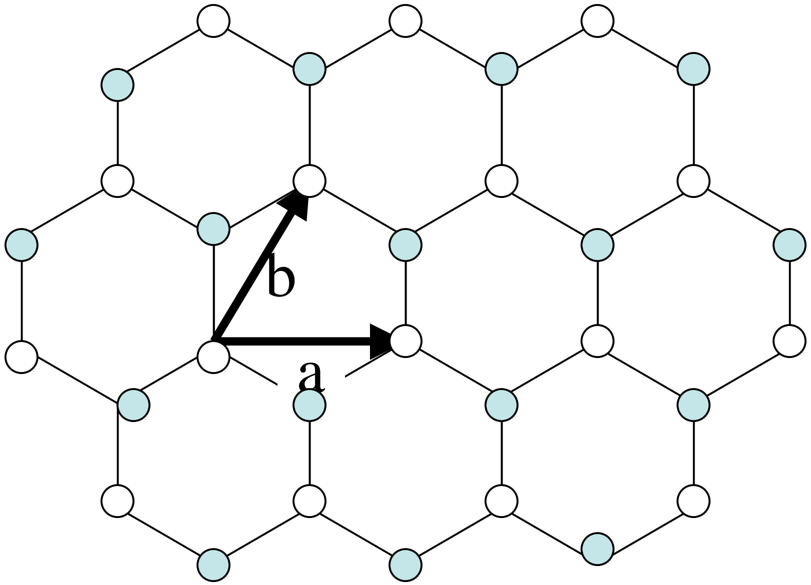
同じ抽象グラフの異なる周期的実現 I

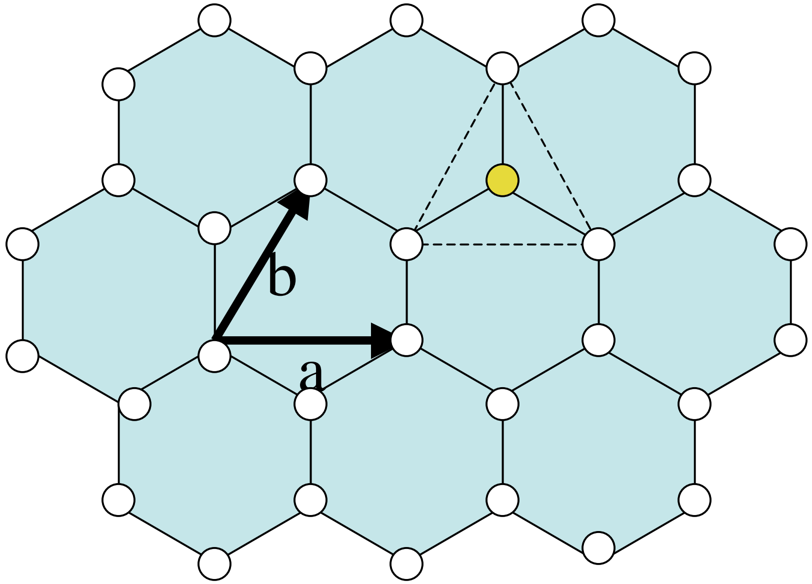






同じ抽象グラフの異なる周期的実現 II

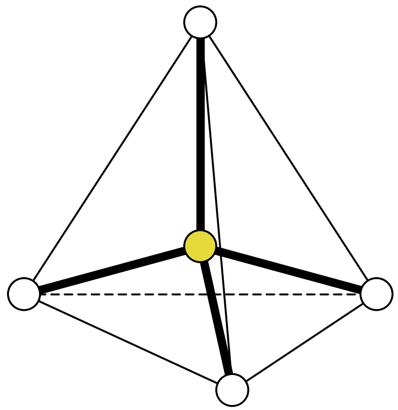




蜂の巣格子：L={ia+jb}で不変

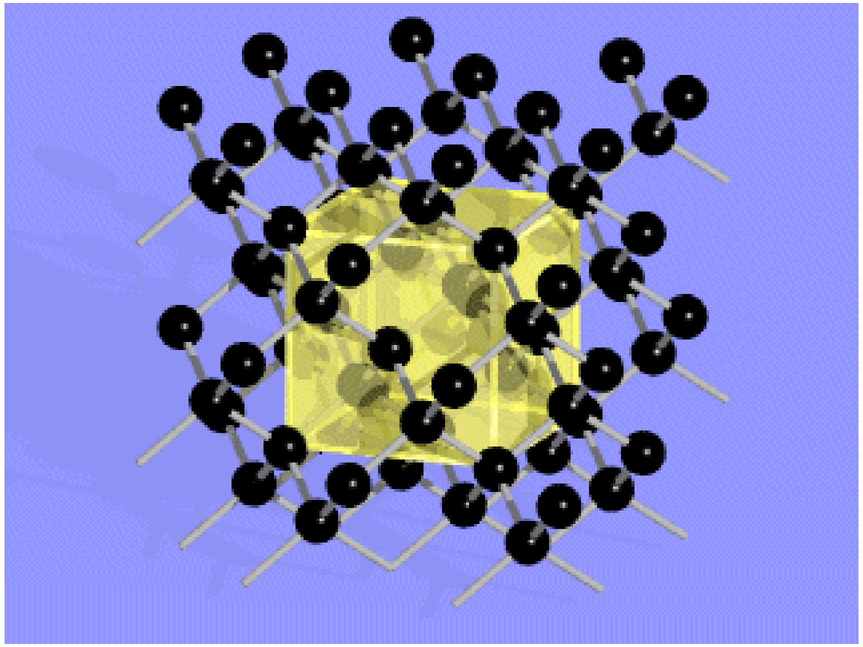
正三角形の頂点と重心が V を構成.
重心と頂点を結ぶ辺が E を構成.

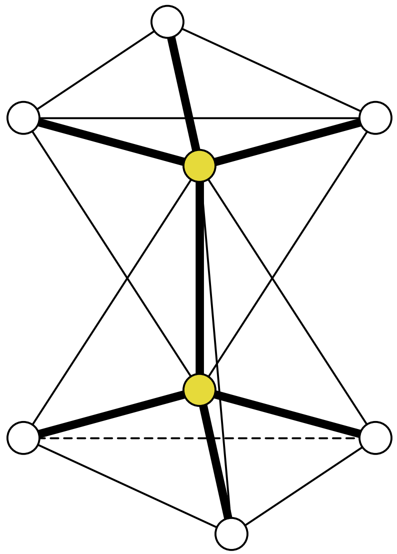
蜂の巣格子の 3 次元版が ダイヤモンド格子

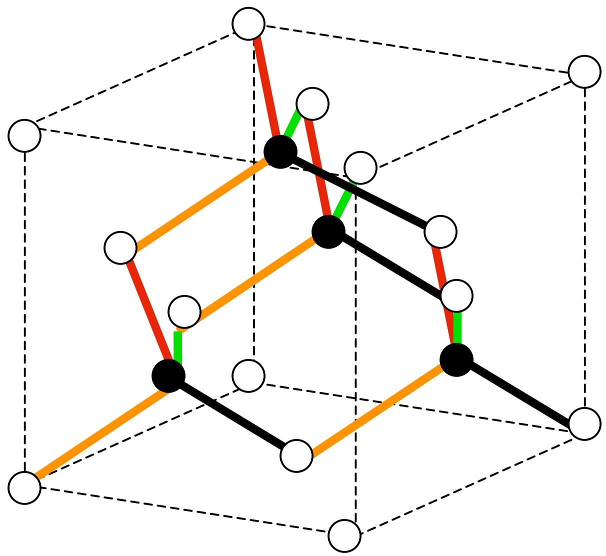


正四面体の頂点と重心が V を構成.
重心と頂点を結ぶ線分が E を構成.

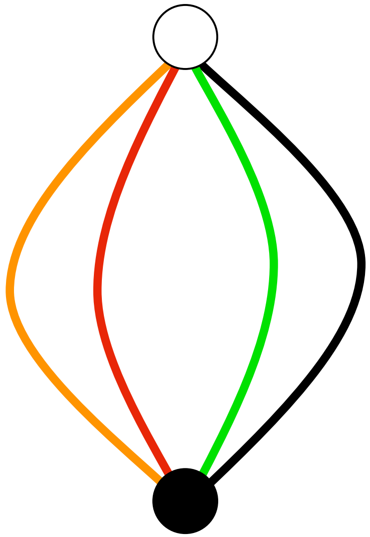
各辺の中点を中心とする点対称図形をつくるとダイヤモンド格子になる







基本有限グラフ



復習

結晶格子とは周期格子群 L の元 a に対して

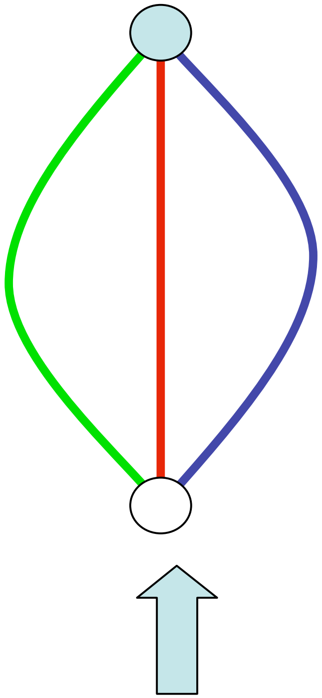
$$T(V)+a=T(V)$$

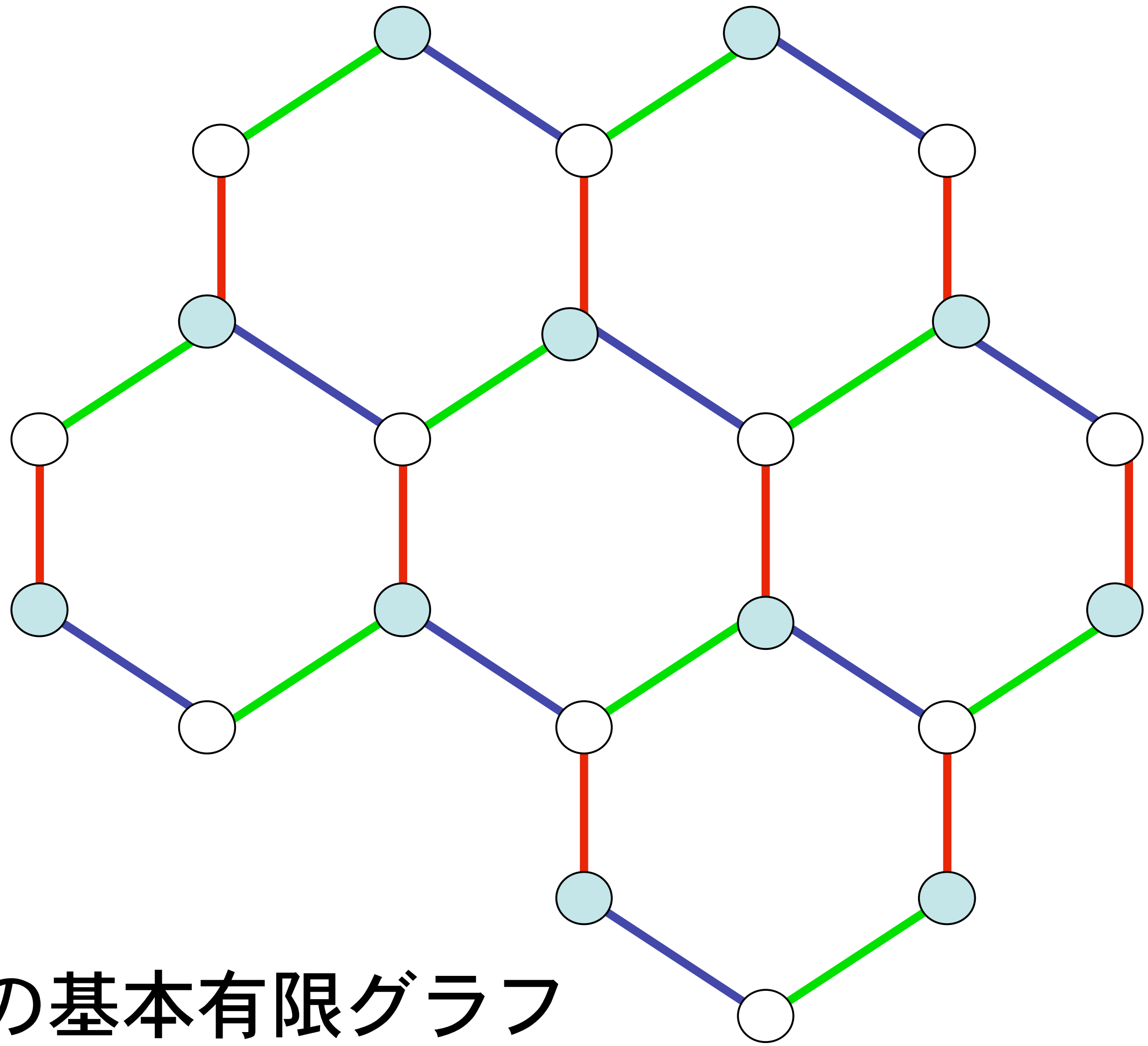
が成り立つような抽象グラフ X の周期的実現

T: X $\longrightarrow$ R実現であった.

基本有限グラフ

あるＬの元 aで移り合う頂点，辺を
同一視して得られるのが基本有限グラフ.
その頂点集合をV_0, 辺の集合をE_0,
基本有限グラフを$X_0=(V_0, E_0)$と書こう.

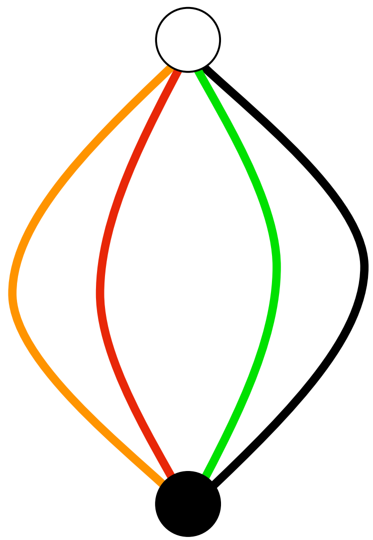




蜂の巣格子の基本有限グラフ

$T : V_0 \longrightarrow R$ が実現 T を決定する.

ダイヤモンド格子の
基本有限グラフ



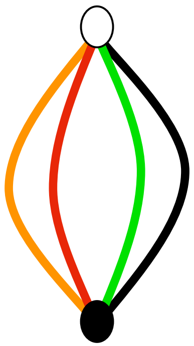
V_0 はやはり2点
E_0 は蜂の巣は３辺，ダイヤは４辺

グラフの自己同形群

X=(V,E) の頂点，辺の置換で結合関係を保つものを自己同形群といい，Aut(X)とかく．

(これは X の実現とは無関係で，抽象グラフからきまる．Xが複雑だと実際に決定するのはむずかしい．)

内部自己同形群の例

 の内部自己同形群 Aut(X)は

辺の入れ替えS_4と，頂点の入れ替えS_2の直積

$$\mathrm{Aut}(X) = S_4 \times S_2$$

外部対称性の群

結晶格子の周期的実現 $T: X \to R$ において

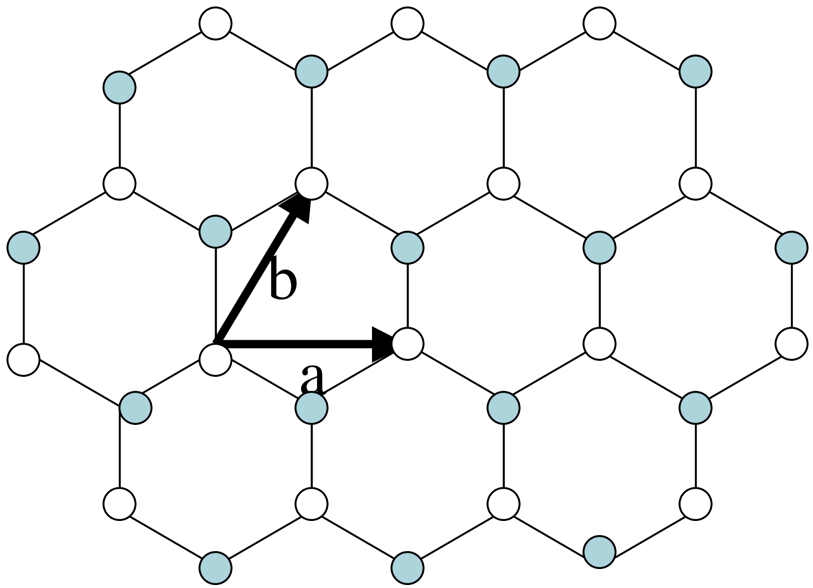
$G(X,T)=\{$合同変換 g で $gT(X)=T(X)$ をみたすもの$\}$

を外部対称性の群という.

例

周期的格子群ＬはG(X,T)の部分群

実際Ｌの定める平行移動でT(X)は不変



外部対称性と内部対称性

G(X,T)は内部対称性を引き起こす． 実際，G(X,T) の元 g に対してAut(X) の元 h が存在して, gT(x)=T(hx) をみたす． この対応:

$$j: G(X,T) \to Aut(X), \quad h=j(g)$$

は単射準同形．

外部対称性は内部対称性より小さい．

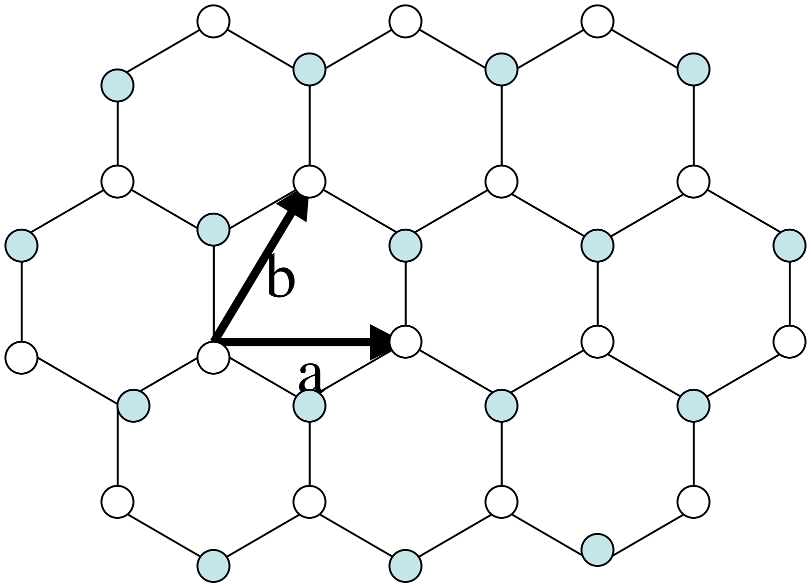
G(X,T) の大きさ

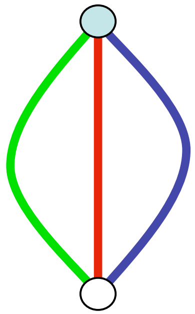
美しさに強く影響

最大対称性をもつ周期的実現＝

$j : G(X,T) \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$ が同形写像

実は，蜂の巣格子とダイヤモンド格子は
これをみたしている．





Aut(X)=S3× S2

４つの元からなる．

蜂の巣格子には外部対称性が，平行移動Ｌの他にも点対称や折り返し，回転などたくさんある．

⇧

実はa,bと，折り返しと，回転など４つの元から構成され，Aut(X)と同形になる．

結晶格子の最大対称性をもつ実現

結晶格子 $X=(V,E)$ の実現$T:X \longrightarrow R$はたくさんあるが，できるだけ $G(X,T)$ を大きくする実現をどうみつけるか？

まず周期格子群 Lを固定した中でこれを見つける問題を考えよう.

最小原理

自然界の法則は最小原理に基づくことが多い．つまり，エネルギーを節約する合理性が問題の解を与える.

グラフのエネルギーを定義し，最小原理をみたす実現を探そう.

⇩

対称性G(X,T)は大きくなる.

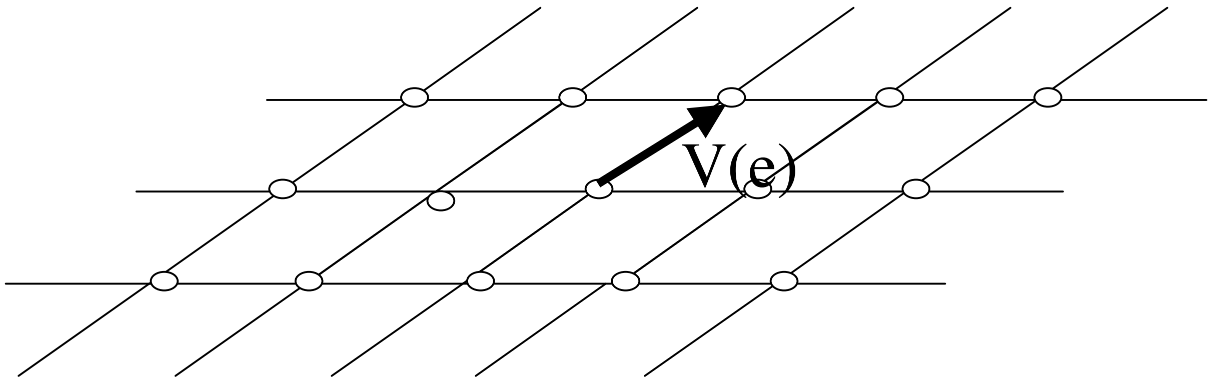
辺eの始点をo(e), 終点をt(e)であらわす.

T:X ⟶ Rを周期的実現とするとき，Rの

ベクトル v(e)を

$$v(e)=T(t(e))-T(o(e))$$

で定める.



グラフのエネルギー

定義：周期的実現 T:X → R のエネルギーを

$$E(T) = \frac{1}{2}\sum_{e \in E_0} |v(e)|^2$$

で定める.

ここにE_0は基本有限グラフの辺集合

離散的ラプラシアン

格子にそうランダムウオークを表す確率を用いて，離散的ラプラシアン $\triangle$ が定義される.

$$\triangle T=0$$

をみたす実現を調和的実現 T という.

調和的実現

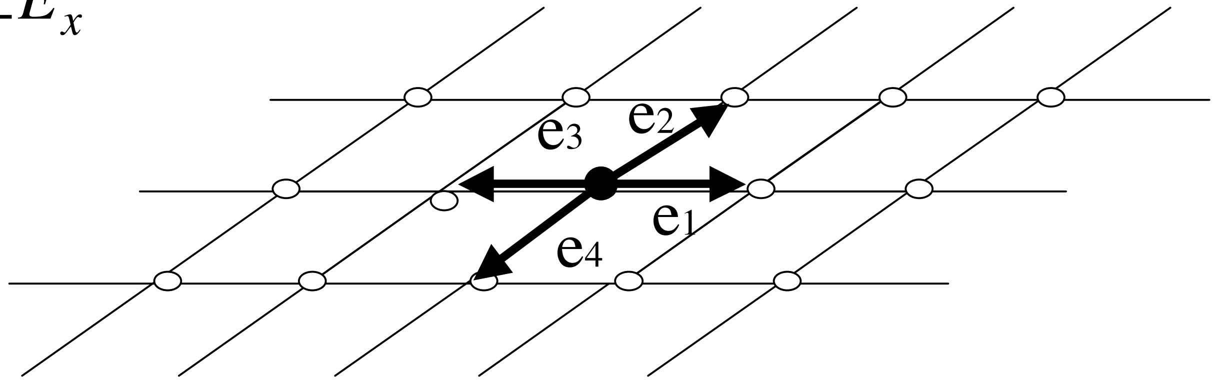
調和的実現 は，Lを固定して考えたときグラフのエネルギーを最小化している.

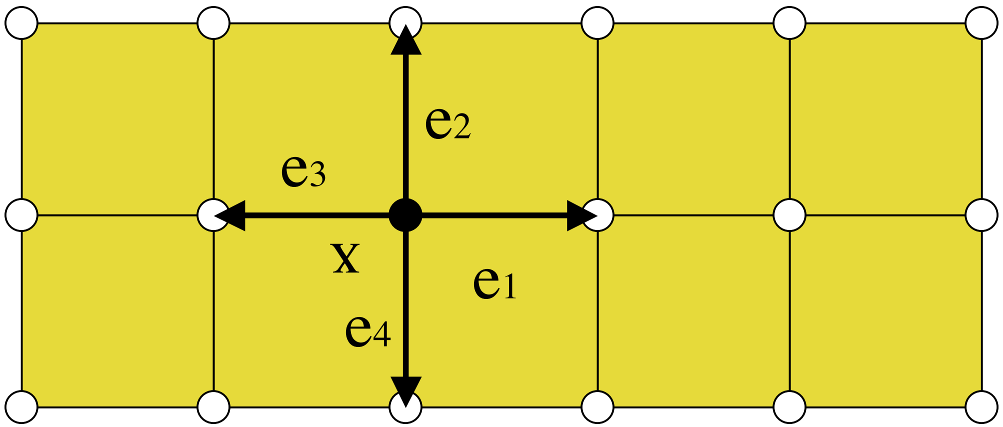
定理：周期的実現 T が調和的実現

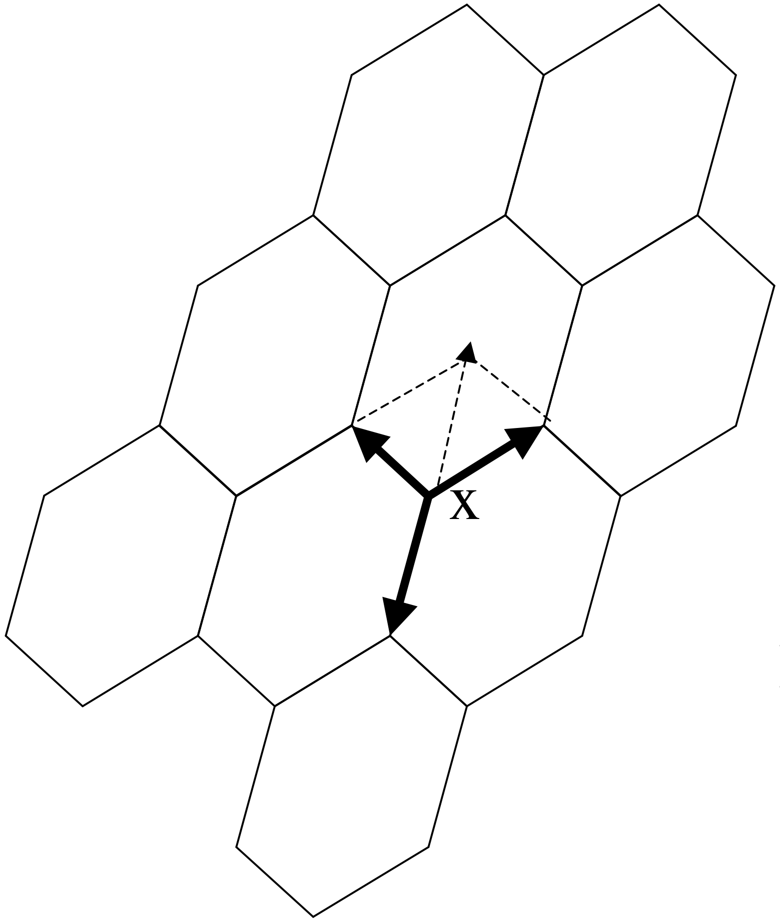
$$\Longleftrightarrow \quad \sum_{e \in E_x} v(e) = 0$$

Ex =T(X)の頂点xから出る辺の集合

$$\sum_{e \in E_x} v(e) = 0$$ をみたす実現例







$$\sum_{e \in E_x} v(e) = 0$$

Lを固定した

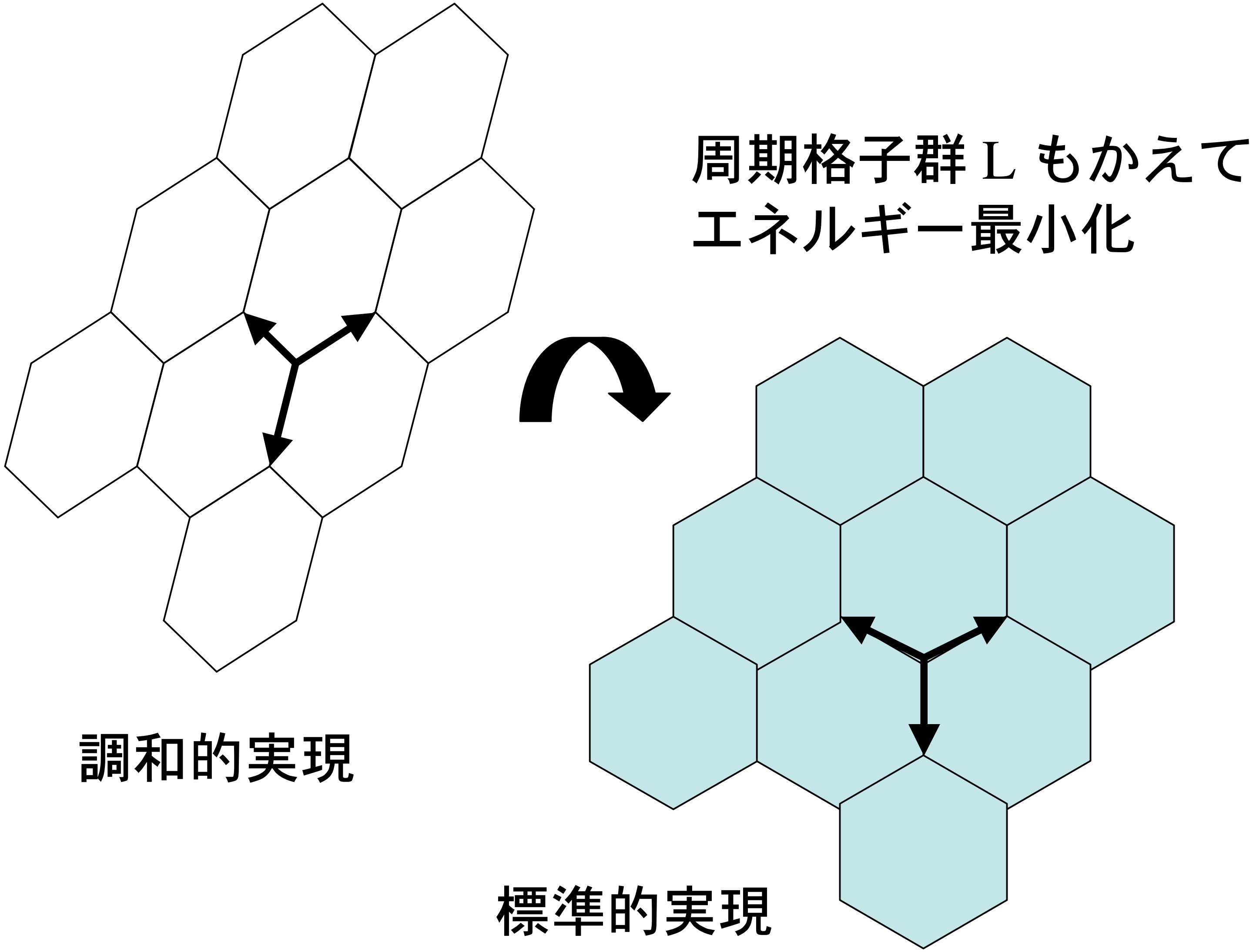
調和的実現

標準的実現

周期格子群Ｌも動かし，グラフのエネルギーを最小にした実現を

標準的実現

という．


周期格子群 L もかえて
エネルギー最小化
調和的実現
標準的実現

ダイヤモンド格子の標準実現

蜂の巣格子とダイヤモンド格子には標準的実現がただ一つ存在し，しかもこれは最大対称性をもつ.

これは美しさの大きな理由

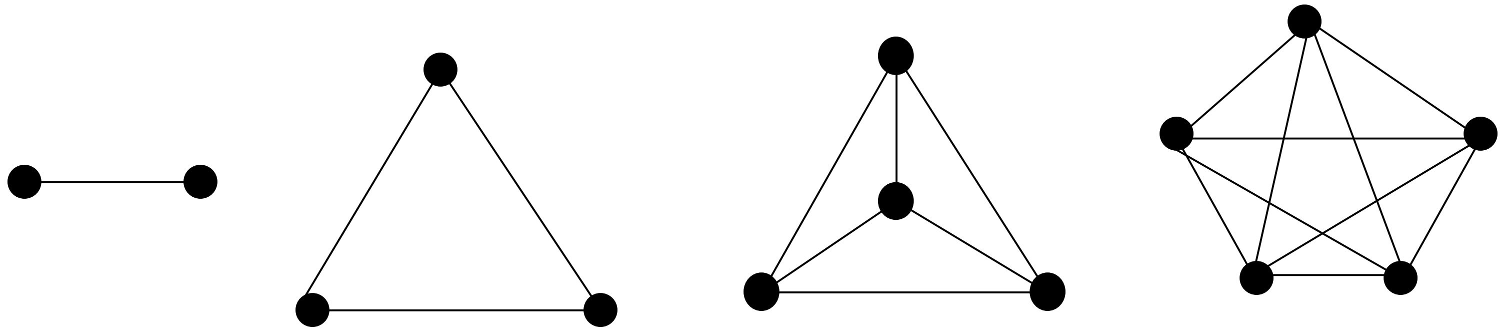
まとめ

ダイヤモンドの美しさの秘密

周期的実現
最大対称性
合理性（調和）

他にはどんな結晶格子があるか

２つの異なる頂点がただ一つの辺で結ばれたグラフを完全グラフと言う.



2　　3　　4　K4格子　　5

頂点の数

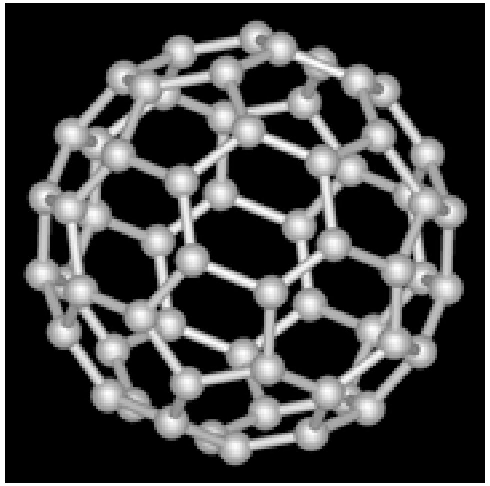
定理（小谷元子-砂田利一，2001）
結晶格子には標準的実現が一意に存在する.

⇓

頂点の数が４の完全グラフK4の標準的実現も一意に存在するが，現実にはその存在は知られていない ⇒ 存在するなら，新しい物質が発見されることになる.

新物質が発見された例：フラーレン

- 炭素原始６０個で構成される新物質：1985年,クロトー,スモーリー，カーにより発見 1996年ノーベル化学賞受賞



大澤映二は、1970年頃その存在を予言していた.

科学技術振興機構 (JST) のプロジェクト

- CREST （チーム型研究）

K4格子も新物質の存在を暗示？

東北大学　小谷元子教授チームがこの研究に取り組んでいる.

- さきがけ　（個人型研究）

奈良女子大　小磯深幸教授は変分問題に関する別の問題に取り組んでいる.

女性科学者の活躍

- 女性の優位性

　管理能力がある

　物事にとらわれない自由な発想

　緻密な思考をもとに，コツコツ研究

不利な点

　家族をもつと負担が大きい

　未だに社会の受け入れ態勢は不備

重要なこと

- 女性研究者の裾野をひろげる.
  これは中高生の時代から必要.

- ロールモデルを若い人たちの間に示す.
（活躍する女性の姿を目の当たりにし,
  その話を聞くことは重要）.

- 実力勝負．目にものを見せてやる！

一方で

- 家族をもつことと，仕事をもつことは
  両方同じくらい大切.
  両方を目指さなくてもちっともかまわない.
- どちらかだけでも達成できればそれは
  すばらしいこと.
- 欲張らず，でも意欲をもって！
- 次の世代をどう育てるかは皆さん次第.

女性の未来は明るい！

ご清聴ありがとう
ございました.

参考文献

- 砂田利一著

「ダイヤモンドはなぜ美しい」
離散調和解析入門

シュプリンガー数学リーディング(2006)