

博士学位論文

CDMA マルチユーザー復調器の統計力学的解析
直接拡散方式における低温での性能評価及び
周波数ホッピング方式のモデル化とその解析

奈良女子大学大学院人間文化研究科 複合現象科学専攻
吉田実加

論文要旨

本研究は、CDMA マルチユーザー復調器の性能評価について調べたものである。CDMA (符号分割多元接続, Code-Division Multiple Access) は、無線通信方式の1つで、拡散符号というユーザー固有の符号を用いて送信信号を拡散させることで、複数のユーザーが同時に同じ無線通信路を使用して行う通信を可能とする技術である。受信者は、全ユーザーの送信情報の重ね合わせを受信情報として受け取る。一般に、受信情報は通信路のノイズによって劣化している。したがって、受信者は復調器を用いて、劣化した受信情報から送信情報の復元(復調)を行う必要がある。復調結果の精度はノイズの大きさ、ユーザー数、拡散符号の与え方などで異なり、それを評価するのが性能評価問題である。

CDMA マルチユーザー復調器の性能評価問題は、レプリカ法を用いた手法が提案されて以来、統計力学の枠組みで解析が行える系として注目されている。これまでの研究では、性能評価指標に対応するレプリカ対称解(RS 解)が導出され、またその解のレプリカ対称性の安定条件が明らかにされている。我々は、統計力学の問題としてこの系を捉え、解の性質を詳細に調べることを試みた。また、提案された解析手法は、直接拡散 CDMA 方式のモデルについて適用されるものである。CDMA 方式には直接拡散方式以外にも周波数ホッピング方式や時間ホッピング方式などが存在し、実際の携帯電話通信にはそれらを混合したものが用いられている。我々は、もう一つの試みとして、性能評価が解析的に行えるような周波数ホッピング方式の1つのモデルを提案し、その解析を行った。

本論文の構成は以下の通りである。

第1部では、無線通信方式の紹介や CDMA 方式の概説を行う。また、これまでの研究を紹介し、研究目的を述べる。

第2部では、低温領域での直接拡散 CDMA (DS-CDMA) 方式におけるマルチユーザー復調器の性能評価問題を調べた。ここで、温度とは通信路ノイズの大きさに対応するパラメータであり、低温はノイズが小さいことに対応する。我々が取り扱うモデルには、真の通信路ノイズの大きさに対応する温度とその温度の推定値、さらにユーザー数と拡散符号のチップ数の比の3つのパラメータが存在する。このモデルと類似した統計力学的モデルでのレプリカ法を用いた解析では、レプリカ対称性は低温領域で破れることが知られている。そのため、DS-CDMA モデルでもレプリカ対称性は低温で破れることが予想される。そこで、低温領域に注目して3つのパラメータを様々に変化させ、RS 解の振る舞いを調べた。その結果、RS 解は低温での解の共存領域で、解の組み換えが起こり複雑な

構造を持つことが分かった。また、レプリカ対称性は、AT 不安定性とエントロピーが負になるという2つの原因によって破れることが分かった。さらに、我々は各々の場合の1ステップレプリカ対称性破れの解 (1RSB 解) を導出し、レプリカ対称性が破れている領域での 1RSB 解の振る舞いを調べた。

第3部では、周波数ホッピング CDMA (FH-CDMA) 方式のモデル化を行った。レプリカ法を用いた解析手法を適用できるモデルを構築するために、FH 方式における拡散符号を、スパースな場合の DS 方式の拡散符号として表した。我々は、FH-CDMA 方式の1つのモデルとしてスパースな拡散符号を持つ DS-CDMA モデルを提案し、そのモデルのレプリカ解析を行った結果、性能評価指標を導出することができた。また、このモデルの数値計算結果とシミュレーション結果を比較したところ、よく一致することが分かった。

最後に、第4部では、まとめと議論と今後の課題を述べる。

目次

第 I 部	はじめに	1
1	無線通信	1
2	スペクトル拡散	4
3	CDMA モデル	5
4	これまでの研究	8
5	研究目的	8
第 II 部	DS-CDMA モデルの低温での性能評価	10
6	はじめに	10
7	モデル	10
7.1	基本モデル	11
7.2	事後分布とマルチユーザー復調 (MAP 法と MPM 法)	13
7.3	レプリカ法を用いた性能評価	14
8	低温での性能評価	15
8.1	低温での RS 解の様子	16
8.2	スピノーダルライン	17
8.3	解の構造	18
8.4	レプリカ対称性の破れ	20
9	数値シミュレーション	28
9.1	シミュレーション方法	28
9.2	結果 1 -解が共存しない領域-	29
9.3	結果 2 -解が共存する領域-	30

10	まとめ	33
第 III 部 FH-CDMA -スパースな拡散符号をもつ CDMA モデル-		35
11	はじめに	35
12	モデル化	35
13	性能評価	38
13.1	レプリカ解析	39
13.2	レプリカ対称解	40
14	数値計算	43
14.1	シミュレーション方法	45
14.2	数値解とシミュレーション結果の比較	45
15	まとめ	46
第 IV 部 まとめと議論		47
16	本論文のまとめ	47
17	議論と今後の課題	49
付録 A DS-CDMA モデルのレプリカ計算		52
A.1	性能評価	52
A.2	レプリカ対称解	57
付録 B スピノーダルライン		60
付録 C AT 安定性		63
付録 D case 1 の 1RSB 解		79
付録 E スパースな拡散符号を持つ DS-CDMA モデルのレプリカ計算		83
付録 F スパースな拡散符号を持つ DS-CDMA モデルのレプリカ対称解		88

付録 G	ビット誤り率	95
付録 H	通信路容量	99

第1部

はじめに

本論文は、統計力学の手法を用いた CDMA (Code-Division Multiple Access) マルチユーザー復調器の性能評価についての研究結果をまとめたものである。まず、ここで、無線通信の1方式である CDMA 通信方式の概要を示し、これまでの研究の流れと我々の研究の目的を述べる。

通信には、大別して有線通信と無線通信があり、どちらも我々の生活になくてはならないものになっている。特に、無線通信は携帯電話の普及により、身近に親しまれ、その重要さは増す一方である。通信環境の整備により、携帯電話での無線通信は快適なものになりつつあるが、利用者が集中したときにシステムが止まるなどの問題が生じることも多い。そのため、安定した通信を保証する通信方式の設計とその方式が様々な条件のもとでどのような通信の性能を実現できるかを知ることが重要である。我々は、携帯電話に主に用いられる CDMA 通信方式での性能評価に注目する。

1 無線通信

ここでは、無線通信について簡単にまとめる [1, 2, 3]。無線通信では、情報信号を特定の周波数の電波に乗せることで情報の伝送を行う。情報信号を電波（通信路）に乗せる方法は変調と呼ばれ、このとき情報信号を乗せて運ぶ波は搬送波（キャリア）と呼ばれる。現在、無線通信の主流となっているのは、0と1からなるデジタル・ビット情報を伝送するデジタル伝送方式である。ここでは、デジタル伝送方式の場合の変調について述べる。変調は、位相、周波数、振幅を加工することによって行われ、それぞれ、位相変調、周波数変調、振幅変調と呼ばれる。

1. 位相変調

搬送波の位相を用いた変調。信号のビット状態に応じて、搬送波の位相を反転させる。よく用いられるものは、前と後の位相状態の違いを用いて情報を検出する方法である。図1は、2位相変調の場合を表している。この場合は、位相が180度違う2つの波がそれぞれ情報ビットの0と1に対応している。

2. 周波数変調

0と1のビットの状態を周波数の高低で表す方法(図2)。

3. 振幅変調

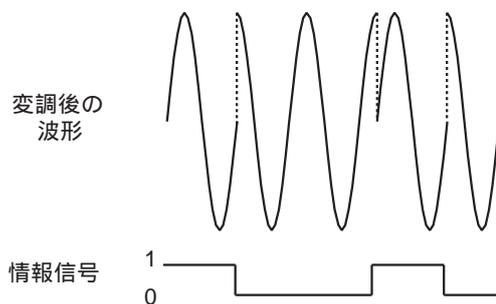


図1 位相変調. 信号 {10010} を送る場合.

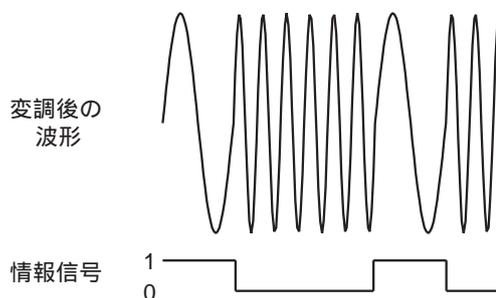


図2 周波数変調. 信号 {10010} を送る場合.

振幅の大小でビット状態を表す変調 (図3)。ただし、この方法では、搬送波の振幅が常に変わる、つまり搬送波の強度が常に変わるため、他の変調方法に比べてノイズに弱いという性質がある。そのため、単独で用いられることは少ない。

これらが、無線通信のデジタル伝送方式における変調の基本方法である。

電波は、携帯電話以外にもラジオやテレビ、タクシー無線といったさまざまな用途で使用されており、各用途に応じて使用する周波数帯は決められている。そのため、携帯電話が無線通信路として使用できる周波数帯は制限されている。一般に、大量の情報を多くのユーザーがやりとりするためには、広い周波数帯を使用することが望ましいが、使用周波数帯が限られるため、その中で適応できる通信方式が必要になる。

複数のユーザーが無線通信路を共有して通信を行う方法を多元接続 (Multiple Access) という。多元接続には周波数分割 (Frequency-Division)、時間分割 (Time-Division)、符

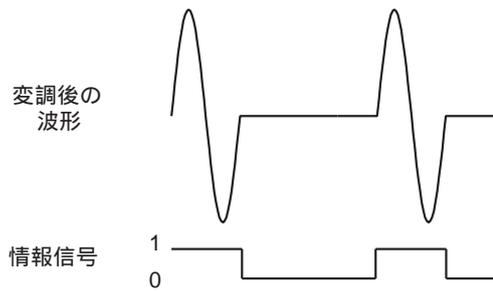


図3 振幅変調. 信号 {10010} を送る場合.

号分割 (Code-Division) などの方法がある。まず、時間分割方式と周波数分割方式について述べる。これらは、通信時に他のユーザーとの干渉がなるべく起こらないようにすることを念頭においた方式である。時間分割方式では、図4に示すように、ユーザー毎に通信を行える時間帯を分け、周波数分割方式では、図5のように、特定の周波数帯に特定の

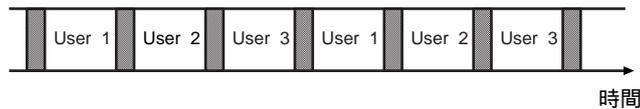


図4 時間分割多元接続.

ユーザーを割り当てることで多元接続を行う。どちらも、他ユーザーとの分離がなされて

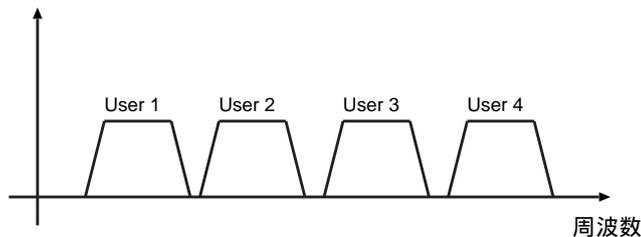


図5 周波数分割多元接続.

いるため、干渉の影響は小さくなるが、ユーザー数が大きくなると、時間分割方式ではユーザーの通信の待ち時間が長くなり、周波数分割方式では周波数帯が足りなくなる等の問題が生じる。

一方、符号分割多元接続 (CDMA) はスペクトル拡散方式に基づいた通信技術であり、それによって上記の問題を回避し、複数のユーザーが同時に同じ周波数帯を使用して通信を行うことを可能とする。以下では、CDMA の説明を行う。

2 スペクトル拡散

スペクトル拡散とは、特定の変調を行うことによって、搬送波 (キャリア) のスペクトル (波を周波数軸から見た場合の波形) の周波数帯域幅を、もともとの帯域幅よりはるかに広く拡散させることであり、それによって周波数帯域幅中に多少妨害があっても元の情報信号に良い精度で復元することを可能にする。スペクトル拡散は、元の情報信号を搬送波に乗せるための変調の後に行われる。そのため、信号を搬送波に乗せる変調は 1 次変調、スペクトル拡散のための変調は 2 次変調と呼ばれる。スペクトル拡散は、拡散方法の違いによって、直接拡散 (Direct Sequence, DS)、周波数ホッピング (Frequency Hopping, FH)、時間ホッピング (Time Hopping, TH) などに分けられる。ここでは、直接拡散と周波数ホッピングについて解説する。

直接拡散方式 (以下 DS 方式) は、変調速度が上がると周波数帯域が広がることを利用し、情報信号を乗せた搬送波をランダムパターンによって高速に変調させることで周波数帯域幅を直接広げる方式である (図 6)。変調は 1 次、2 次ともに位相変調が用いられる。このとき用いられるランダムパターンは拡散符号と呼ばれる。

周波数ホッピング方式 (以下 FH 方式) は、搬送波の周波数 (キャリア周波数) をある範囲内で次々に変えることで広い周波数帯を使用しているようにみせる方式である (図 7)。変調は、1 次、2 次ともに周波数変調が用いられる。この方式では、周波数ホップのパターンが直接拡散方式での拡散符号に対応している。

スペクトル拡散された情報信号は、拡散符号を使って逆拡散を行うことで元の情報信号に復元 (復調) される。拡散符号が既知でなければ、スペクトル拡散された情報から送信情報を復調することができないため、例え第 3 者が拡散された情報を傍受したとしても元の情報を知られることはない。つまり、スペクトル拡散方式はプライバシーの保護にも優れているという性質がある。

CDMA ではそれぞれのユーザーに固有の拡散符号を割り当てる。ユーザーは、元の情報信号を送る代わりに各自の拡散符号を使ってスペクトル拡散させた情報信号を送る。受

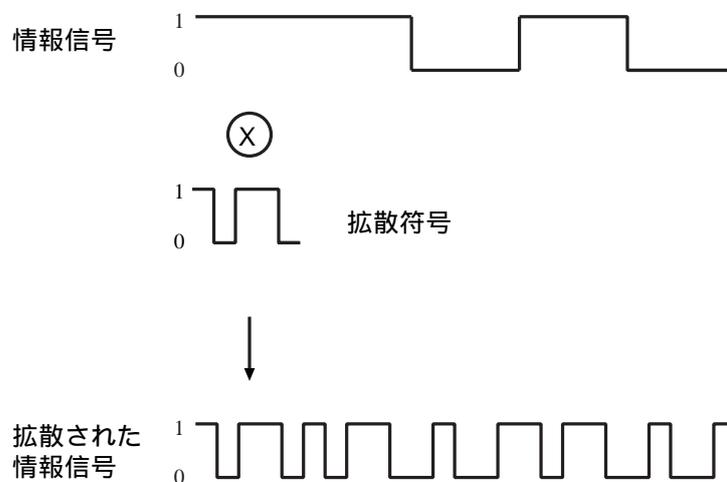


図6 直接拡散方式. 情報信号に、拡散符号をかけることでスペクトル拡散させる.

信者は同時に送られてくる全ユーザーの拡散された情報の重ね合わせを受け取る。次章では CDMA モデルを用い、逆拡散によって受信者が受け取った受信信号から送信情報を復調する様子を示す。

3 CDMA モデル

CDMA 方式のモデルを示す [3, 4]。以下では、取り扱いの便利さから、0 と 1 からなるビットを -1 と $+1$ に読み替えて使用する。また変調は、2 位相変調の場合を考え、位相の異なる 2 つの波をそれぞれ $+1$ と -1 に対応させる。通信路内で送信情報に影響を及ぼすユーザー間の干渉などは、まとめてノイズとして表す。また、複数のユーザーが同時に通信路を使用するときは、完全に同期しているとする。

スペクトル拡散された送信情報は、ユーザーが送信を行った場所から最も近くにある変調基地局という中継地点に集められる。図 8 は、 N 人のユーザーが同時に通信路を使用する様子を表している。通信中のノイズは、加法的であるとしている。基地局が受信する情報は、ある時刻に同じ無線通信路を使って送信を行った全ユーザーについての拡散された送信情報の重ね合わされたものにノイズが加わったものである。基地局では、このような受信信号を復調器を使って復調し、その後、各ユーザーの送りたい相手へと情報を送り

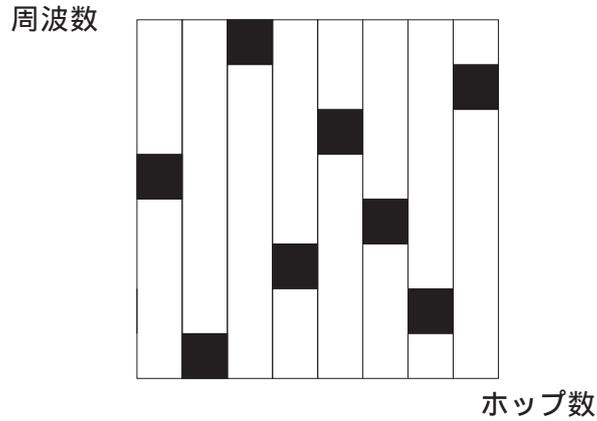


図 7 周波数ホッピング方式のホッピングパターン例. 情報信号を乗せた搬送波は、黒い領域の周波数をホップする.

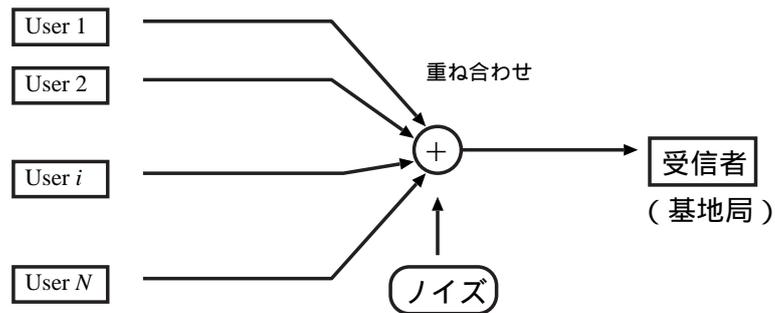


図 8 CDMA 通信路のモデル.

出す。以後、基地局を受信者と呼ぶ。受信者は、受信情報と、各ユーザーの拡散符号を用いて復調を行う。ノイズが無い理想状態では、拡散符号を各ユーザーについて直交するようにとってあれば、あるユーザーの送信情報は、そのユーザーの拡散符号を受信信号に乗算させることによって取り出すことができる。このような復調方法をシングルユーザー復調という。

ここでは、ノイズ無しの理想状態における、シングルユーザー復調器の復調を示す。CDMA としては、直接拡散 CDMA(以下、DS-CDMA) モデルの場合を考える。同時に情報の送信を行うユーザー数を N 人、拡散符号のチップ数を p とする。 i 番目のユーザー

の送信情報を η_i 、 i 番目のユーザーの拡散符号列を $\{\xi_i^1, \xi_i^2, \dots, \xi_i^p\}$ とおく。受信情報を $\{y^1, y^2, \dots, y^p\}$ とすると、

$$y^\mu = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \xi_j^\mu \eta_j. \quad (\mu = 1, \dots, p) \quad (1)$$

となる。 $\frac{1}{\sqrt{N}}$ は規格化定数である。 i 番目のユーザーの情報を復調するためには、 $\{y^\mu; \mu = 1, \dots, p\}$ に i 番目のユーザーの拡散符号 $\{\xi_i^\mu; \mu = 1, \dots, p\}$ を乗算する。このとき、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu y^\mu \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \xi_j^\mu \eta_j = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \eta_j \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \xi_j^\mu \\ &= \frac{1}{N} \left\{ \eta_i \sum_{\mu=1}^p (\xi_i^\mu)^2 + \sum_{j \neq i} \eta_j \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \xi_j^\mu \right\} \\ &= \frac{p}{N} \eta_i + \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} \eta_j \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \xi_j^\mu \end{aligned} \quad (2)$$

となる。(2) 式の第 1 項は、 i 番目のユーザーの送信情報を定数倍したものであり、第 2 項はユーザー間干渉を表している。拡散符号のチップ数 p が大きくなるとユーザー間干渉は小さくなる。したがって、チップ数 p が十分大きく (2) 式の第 2 項を無視できると考えると、 i 番目のユーザーの送信情報は $\text{sgn} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu y^\mu \right)$ と一致する。

これは、ノイズが無い場合での復調であるが、無線通信においては、ノイズの影響は非常に大きいので、ノイズがある場合の復調を考慮する必要がある。ノイズは、加法的白色ガウスノイズが通信時のノイズを表す良い近似になっていることが知られている。このようなノイズによる干渉を受ける場合にはシングルユーザー復調器では正しい復調結果が得られない。そのためより高い性能を実現する復調器が必要とされる。また、そのような復調器の性能を評価することも必要となる。一般に、復調器の性能はユーザー数が少なく、拡散符号のチップ数が大きくなるほど向上する。しかし、実用に際しては、ユーザー数が多い場合の安定した通信が求められ、一方で、チップ数が大きくなることは一度の通信にかかる時間とコストが大きくなることから、チップ数の下限が要求される。このことから、性能評価にはノイズの大きさとともにユーザー数 N とチップ数 p が重要なパラメータであることが分かる。これらのパラメータを様々に変えて性能評価を行うことで、ノイズの大きさに対するユーザー数や拡散符号のチップ数の目安をたてることができるように

なる。ノイズがある場合の復調法の詳細は次の第2部で示す。

4 これまでの研究

CDMAの研究には、復調アルゴリズムの構築とそのアルゴリズムの性能評価という2つの流れがある。

ノイズがある場合の復調器としては、ベイズ推論に基づくマルチユーザー復調器がある。これは、加法的なノイズが加わる通信路において、理想的な性能を得ることができるが、この復調器による復調は統計力学で良く問題にされるNP完全問題、つまり系の大きさの指数関数に比例して解法にかかる手間が増える組み合わせ最適化問題に相当する。したがって、現存する計算機では、系の大きさが大きくなると実時間において、この復調器で復調を行うことは不可能になる。そのため、有限時間で解ける代替アルゴリズムが複数提案されている。復調器の性能評価問題については、マルチユーザー復調器が代替アルゴリズムを含めた復調器の性能の最大値になることから、マルチユーザー復調器について調べることは大きな意味がある。DS-CDMAマルチユーザー復調器の性能評価については、Tanakaによって、レプリカ法という統計力学の枠組みを使用することで解析的に性能評価を行えることが示された [5]。それ以降、統計力学の手法を用いた性能評価問題の研究が活発に行われるようになった [6, 7, 8, 9, 10]。統計力学の枠組みで性能評価を行う場合は、大システム極限 $N, p \rightarrow \infty$ が想定される。レプリカ法を用いた解析では、この極限のもとで性能評価指標の導出が行われる。当初の研究では、ノイズは加法的白色ガウスノイズの場合のみが考慮されていたが、最近では任意の加法的ノイズについて性能評価が行われるようになり [6]、また送信情報がビットからなる場合のみではなく、連続値を取る場合においても調べられている [7]。さらに、Multi-Input Multi-Output (MIMO) チャネルの系についてもレプリカ法を適用した性能評価が可能であることが報告されている [8, 9, 10]。

5 研究目的

ノイズがあるDS-CDMAマルチユーザー復調器の性能評価問題はスピングラスやアンチホップフィールドモデルと類似している。スピングラスやアンチホップフィールドモデルについてはレプリカ法を用いた解析について詳細な研究があり、様々な知見が得られている。レプリカ解析では、はじめにレプリカ対称性を仮定して解を導出する。このとき、レプリカ対称な解の妥当性を調べる必要があり、レプリカ対称性が破れていれば、レプリ

力対称性破れの解を考慮しなければならない。スピングラスなどのモデルでは、レプリカ対称性は低温で破れることが知られており、そのような領域では、レプリカ対称性破れの解が考慮されている。一方、DS-CDMA モデルのマルチユーザー復調器の性能評価をレプリカ法で行う場合は、レプリカ対称解における性能のみが考慮されてきた。我々はこのモデルにおける解の性質をより明らかにするため、ノイズが小さい場合に相当する低温領域に注目する [11]。スピングラスモデルなどのモデルとの類似から、DS-CDMA モデルにおいても低温でレプリカ対称性の破れが起こることが予想されるからである。我々は、レプリカ法を用いて導出された解の振る舞いを低温領域で詳細に調べていく。これは次の第 2 部で行う。

マルチユーザー復調器の性能評価問題は DS-CDMA モデルについては確立されているが、FH-CDMA 等の他の CDMA 方式においては、現在模索段階にある。そこで、我々は、統計力学の枠組みで性能評価を行うことが可能となるように FH-CDMA をモデル化し、そのモデルにおける性能評価指標の導出を行う。これは第 3 部で行う。

本論文の構成は以下の通りである。第 2 部で、ノイズのある DS-CDMA モデルの低温での性能評価を行い、第 3 部で、FH-CDMA 方式のモデル化とその解析を行う。第 4 部では、全体のまとめと議論を行う。

第 II 部

DS-CDMA モデルの低温での性能評価

6 はじめに

DS-CDMA モデルでのベイズ推論に基づくマルチユーザー復調器の性能評価問題は、レプリカ法という統計力学の枠組みを使用することにより性能評価を解析的に行えることが Tanaka によって示された [5]。この系は、外場のあるスピングラスモデルやニューラルネットワークにおけるアンチホップフィールドモデルと類似したハミルトニアンをもつ [12, 13]。外場のあるスピングラスモデルや Unlearning のモデルであるアンチホップフィールドモデルでは、レプリカ法を用いたとき低温でレプリカ対称性が破れることが知られている。スピングラスモデルやアンチホップフィールドモデルのハミルトニアンの類似から、CDMA モデルにおいても性能評価指標に対応する解のレプリカ対称性が低温で破れることが予想される。我々は、CDMA モデルにおける解の性質の詳細を調べるため、低温領域に注目し、レプリカ対称 (RS) 解の振る舞いと安定性を調べた。その結果、低温で RS 解が共存する領域を明らかにし、また RS 解が共存する $T \leq T_0$ の領域で RS 解の組み換えが起こることを示した。さらに、RS 解は、AT 不安定性によるものとエントロピーが非負である条件を破るものとの 2 通りの方法で破れることが分かった。我々は、それぞれについてレプリカ対称性 1 回破れ (1RSB) 解を求めた。理論結果の検証のため、モンテカルロシミュレーションを行い、理論結果との比較を行った。その結果、低温で 1RSB 解が準安定な状態として存在する場合は、シミュレーション結果は準安定状態にトラップされるが、それ以外では、理論とシミュレーションの結果は非常に良く一致することが分かった。

第 2 部は以下の構成になっている。まず、次章でノイズあり DS-CDMA モデルを示し、マルチユーザー復調器とその性能評価法を説明する。次に第 8 章で低温でのレプリカ対称解の振る舞いと解の安定性の結果を示す。第 9 章では、理論で得られた結果とシミュレーション結果との比較を行い第 10 章で 2 部の内容をまとめる。

7 モデル

ここでは、ノイズがある場合の DS-CDMA モデルを説明し、ベイズ推論に基づくマルチユーザー復調器とその性能評価法について説明する [5]。ノイズは加法的白色ガウスノ

イズを考える。

7.1 基本モデル

ユーザー数は N 人とする。 i 番目のユーザーの情報ビットを η_i で表し、 $\eta_i = \pm 1$ とする。 拡散符号のチップ数を p とし、 i 番目のユーザーの拡散符号を $\{\xi_i^\mu; \mu = 1, \dots, p\}$ で表し、 $\xi_i^\mu = \pm 1$ とする。 さらに、通信路のノイズを平均 0、分散 σ_0^2 のガウスノイズ $\{n^\mu; \mu = 1, \dots, p\}$ とすると、受信信号系列 $\{y^\mu; \mu = 1, \dots, p\}$ は次のように表される。

$$y^\mu = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \eta_i + n^\mu. \quad (\mu = 1, \dots, p) \quad (3)$$

表記を簡単化するため、次の記号を導入する。 $\mathbf{y} \equiv (y^1, \dots, y^p)^T$, $\boldsymbol{\eta} \equiv (\eta_1, \dots, \eta_N)^T$, $\mathbf{n} \equiv (n^1, \dots, n^p)^T$, $(\Xi)_{\mu i} \equiv \xi_i^\mu, \mu = 1, \dots, p; i = 1, \dots, N$ 。 T は転置を表す。この時、(3) 式は次のように表される。

$$\mathbf{y} = \frac{1}{\sqrt{N}} \Xi \boldsymbol{\eta} + \mathbf{n}. \quad (4)$$

推定情報信号を $\mathbf{s} \equiv (s_1, \dots, s_N)^T$ とし、受信信号系列と拡散符号系列が既知の場合、ノイズのある通信路を通して送られてきた情報信号の復調について考える。ただし、情報信号の事前分布は、1 と -1 が等確率で出現する一様分布に従うと仮定する。このとき、事前分布は、 $p(\boldsymbol{\eta}) = p(\mathbf{s}) = \frac{1}{2^N}$ と表される。また、拡散符号系列は 1 と -1 を等確率で発生させるとし、その分布は一様分布 $p(\Xi) = \frac{1}{2^{Np}}$ で表す。今、ガウスノイズを考えているので、

$$\begin{aligned} p(\mathbf{n}) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \right)^p \exp \left(-\frac{1}{2\sigma_0^2} \|\mathbf{n}\|^2 \right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \right)^p \exp \left(-\frac{1}{2\sigma_0^2} \left\| \mathbf{y} - \frac{1}{\sqrt{N}} \Xi \boldsymbol{\eta} \right\|^2 \right) \end{aligned}$$

より、送信情報信号が $\boldsymbol{\eta}$ のもとでの \mathbf{y} の分布は、

$$p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\eta}; \Xi) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \right)^p \exp \left(-\frac{1}{2\sigma_0^2} \left\| \mathbf{y} - \frac{1}{\sqrt{N}} \Xi \boldsymbol{\eta} \right\|^2 \right) \quad (5)$$

と表される。

CDMA方式の復調の問題は、 \mathbf{y}, Ξ を既知として η を推定する問題である[3]。推定情報信号が s であるという条件のもとでの \mathbf{y} の分布は、

$$p(\mathbf{y}|s; \Xi) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^p \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left\| \mathbf{y} - \frac{1}{\sqrt{N}} \Xi s \right\|^2 \right) \quad (6)$$

である。ここで、 σ^2 はガウスノイズの分散の推定値であり、真の分散 σ_0^2 とは一般に異なる。復調を行うためには、 \mathbf{y} と Ξ の条件のもとでの s の分布である事後分布 $p(s|\mathbf{y}; \Xi)$ を求める必要がある。

一般に2つの事象 A, B があるとき、ベイズの公式より B が起きたという条件のもとで A が起きる条件付き確率 $P(A|B)$ は、その逆の条件付き確率 $P(B|A)$ と A の確率 $P(A)$ から次のように表される。

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{\sum_A P(B|A)P(A)}. \quad (7)$$

今、一様な事前分布を仮定しているので、ベイズの公式を使うと、事後分布 $p(s|\mathbf{y}; \Xi)$ は次のように与えられる[14, 15, 16]。

$$p(s|\mathbf{y}; \Xi) = (Z(\mathbf{y}; \Xi))^{-1} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left\| \mathbf{y} - N^{-1/2} \Xi s \right\|^2 \right), \quad (8)$$

$$Z(\mathbf{y}; \Xi) = \sum_s \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left\| \mathbf{y} - N^{-1/2} \Xi s \right\|^2 \right). \quad (9)$$

ここで温度パラメータを $T_0 = \beta_0^{-1} = \sigma_0^2$, $T = \beta^{-1} = \sigma^2$ と定義すると、事後分布はハミルトニアン $\mathcal{H}(s)$ をもつカノニカル分布の形に書き直すことができる。

$$p(s|\mathbf{y}; \Xi) = (Z(\beta))^{-1} \exp(-\beta \mathcal{H}(s)), \quad (10)$$

$$Z(\beta) = \sum_s \exp(-\beta \mathcal{H}(s)), \quad (11)$$

$$\mathcal{H}(s) = \frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} s_i s_j - \sum_i h_i^0 s_i, \quad (12)$$

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \xi_j^\mu, \quad h_i^0 = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu y^\mu.$$

(12)式で表されたハミルトニアン $\mathcal{H}(s)$ は、外場のあるスピングラスモデルやアンチホップフィールドモデルのものと同じ形式をしている[12, 13]。

7.2 事後分布とマルチユーザー復調（MAP法とMPM法）

ここでは、MAP法とMPM法という2種類のベイズ推論に基づくマルチユーザー復調器について説明する。

(10)式は、 \mathbf{y} と Ξ が与えられた場合の s の確率分布である。いろいろな $s = \{s_1, \dots, s_N\}$ のうち、一番もってもらいたいのは(10)式を最大化する s 、つまりスピンの言葉で言う基底状態であると考えられる。この考え方に基づき最大事後確率(Maximum A Posteriori)法(MAP法)では、ハミルトニアン(12)式の基底状態を探索することで、全てのユーザーの情報信号の推定を行う。

一方、MPM(Marginal Posterior Mode)法は有限温度復号とも呼ばれ、事後分布から特定のユーザーの情報信号の推定を行う復調法である。例として、 i 番目のユーザーの情報信号の推定値 s_i を求める場合を考える。(10)式の確率分布で、 s_i をのぞく全ての s_k について和をとると、 s_i についての事後確率 $p(s_i|\mathbf{y};\Xi)$ が得られる。

$$p(s_i|\mathbf{y};\Xi) = \sum_{\mathbf{s} \setminus s_i} p(\mathbf{s}|\mathbf{y};\Xi) = \frac{\sum_{\mathbf{s} \setminus s_i} \exp(-\beta\mathcal{H}(\mathbf{s}))}{Z(\beta)}$$

復調は、 $p(s_i|\mathbf{y};\Xi)$ を $s_i = 1$ と $s_i = -1$ で比較し、確率の高い方を選ぶ。

$$\begin{aligned} & p(s_i = 1|\mathbf{y};\Xi) - p(s_i = -1|\mathbf{y};\Xi) \\ &= 1 \times p(s_i = 1|\mathbf{y};\Xi) + (-1) \times p(s_i = -1|\mathbf{y};\Xi) \\ &= \sum_{s_i \pm 1} s_i p(s_i|\mathbf{y};\Xi) \end{aligned} \quad (13)$$

より、(13)式が正ならば $s_i = 1$ 、負なら $s_i = -1$ が選ばれる。従って、MPM復調器による復調結果 s_i^{MPM} は次式のように表せる。

$$\begin{aligned} s_i^{\text{MPM}} &= \text{sgn} \left(\sum_{s_i \pm 1} s_i p(s_i|\mathbf{y}) \right) = \text{sgn} \left(\frac{\sum_{s_i \pm 1} \sum_{\mathbf{s}(\neq s_i)} s_i \exp(-\beta\mathcal{H}(\mathbf{s}))}{Z(\beta)} \right) \\ &= \text{sgn} \left(\frac{\sum_{\mathbf{s}} s_i \exp(-\beta\mathcal{H}(\mathbf{s}))}{Z(\beta)} \right) = \text{sgn} \langle s_i \rangle_{\beta}. \end{aligned}$$

ここで、 $\langle \cdot \rangle$ は事後分布についての平均を表す。MPM法では、 $\beta = \beta_0$ の時にユーザー毎の事後確率が最大になる[14]。また、 $\beta \rightarrow \infty$ ($T \rightarrow 0$)の極限をとったものはMAP法での復調結果に相当する。以後、我々はMPM復調器の性能評価問題について調べる。

7.3 レプリカ法を用いた性能評価

ここでは MPM 復調器による復調結果 $\text{sgn}\langle s_i \rangle_\beta$ の性能評価法を示す。

$Z(\beta)$ は統計力学における分配関数であり、自由エネルギー F は $F = -\frac{1}{\beta} \log Z(\beta)$ で表される。ここで、 $\alpha \equiv \frac{p}{N}$ は有限のまま、 $N \rightarrow \infty, p \rightarrow \infty$ とする大システム極限において自己平均性が成り立っていると仮定する。このとき、1 ユーザーあたりの自由エネルギーは、1 ユーザーあたりの自由エネルギーを情報信号、拡散符号とノイズについて平均したものと一致する。以下では、後者の 1 ユーザーあたりの自由エネルギーの平均値を評価する。これを f とおくと、 f は次のように表される。

$$f = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta N} [\log Z(\beta)].$$

$[\cdot]$ は、 $\boldsymbol{\eta}, \Xi$ と \boldsymbol{y} についての平均を表わす。 $[\log Z(\beta)]$ の評価はレプリカ法を用いて行う。レプリカ法では、恒等式

$$[\log Z(\beta)] = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{[Z(\beta)^n] - 1}{n}$$

より、 n を自然数として $[Z(\beta)^n]$ を評価した後、 $n \rightarrow 0$ の極限をとる。 n 個のレプリカ変数 $\boldsymbol{s}_a = (s_{1a}, \dots, s_{Na})^T, a = 1, \dots, n$ を導入すると、 $Z(\beta)^n$ は次のように表される。

$$Z(\beta)^n = \prod_{a=1}^n \sum_{\boldsymbol{s}_a} \exp\left(-\frac{\beta}{2} \|\boldsymbol{y} - N^{-1/2} \Xi \boldsymbol{s}_a\|^2\right).$$

巨視的パラメータ、

$$R_a = \frac{1}{N} \boldsymbol{\eta}^T \langle \boldsymbol{s}_a \rangle, \quad (a = 1, \dots, n) \quad (14)$$

$$q_{ab} = \frac{1}{N} \langle \boldsymbol{s}_a \rangle^T \langle \boldsymbol{s}_b \rangle \quad (a < b) \quad (15)$$

と R_a, q_{ab} に共役なパラメータ $\hat{R}_a (a = 1, \dots, n), \hat{q}_{ab} (a < b)$ を使い、さらにレプリカ対称性 ($R_a = R, q_{ab} = q, \hat{R}_a = \hat{R}, \hat{q}_{ab} = \hat{q}$) を仮定すると、レプリカ対称 (Replica Symmetric, RS) な自由エネルギー f_{RS} は、次式となる (導出は付録 A)。

$$\begin{aligned} -\beta f_{\text{RS}}(q, \hat{q}, R, \hat{R}, \beta, \beta_0, \alpha) = & \alpha \left(-\frac{1}{2} \ln(1 + \beta(1 - q)) - \frac{\beta(1 + q - 2R + \beta_0^{-1})}{2(1 + \beta(1 - q))} \right. \\ & \left. + \frac{1 + \beta_0}{2\beta_0} \beta \right) + \int Dz \ln \left(2 \cosh(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R}) \right) \\ & - \frac{\hat{q}}{2}(1 - q) - R\hat{R}. \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、 $\alpha \equiv \frac{p}{N}$, $Dz \equiv \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$ である。レプリカ対称解 (RS 解) についての鞍点方程式は、各変数についての極値条件

$$\frac{\partial}{\partial \hat{R}} (-\beta f_{\text{RS}}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \hat{q}} (-\beta f_{\text{RS}}) = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial R} (-\beta f_{\text{RS}}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial q} (-\beta f_{\text{RS}}) = 0 \quad (18)$$

を課すことにより、次のようになる。

$$R = \int Dz \tanh(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R}), \quad (19)$$

$$q = \int Dz \tanh^2(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R}), \quad (20)$$

$$\hat{R} = \frac{\alpha\beta}{1 + \beta(1 - q)}, \quad (21)$$

$$\hat{q} = \frac{\alpha\beta^2(q - 2R + 1 + \beta_0^{-1})}{(1 + \beta(1 - q))^2}. \quad (22)$$

(14) 式より、 R は真の情報信号とその事後平均推定量とのオーバーラップを表している。推定値の真の情報信号に対する誤り率をビット誤り率 P_b とするとき、 R と P_b との関係は、 $R = 1 - 2P_b$ である。このことから、RS 解の R を復調の性能評価指標と捉えることができる。ここで、この系のパラメータは β , β_0 , α である。 β_0 は通信路ノイズの真の分散の逆数であり、 β はその推定値、 α はユーザー数と拡散符号のチップ数の比である。性能評価は、これらのパラメータのもとでの性能評価指標の振る舞いを調べることに相当する。我々は、低温での R の振る舞いに注目する。

8 低温での性能評価

低温、つまりノイズの分散が小さい場合の性能評価を RS 解の R を用いて行う。 R は真の情報信号とその推定値のオーバーラップに相当するので、 R が 1 であれば、復調が成功していることになる。一般に、ユーザー数 N と拡散符号のチップ数 p の比である $\alpha = \frac{p}{N}$ が大きくなると、拡散された送信情報の冗長性が大きくなるので、復調の性能が上がる。

また、類似のハミルトニアンを持つモデルの結果からの類推より、低温領域ではレプリカ対称性の破れが生じることが予想される。以下では、性能評価指標である解 R の低温での振る舞いを詳細にみていく。

8.1 低温での RS 解の様子

低温では RS 解が共存することが知られている。図 9 は、 $T = T_0 = 0.05$ での R の α 依存性を描いたものである。図 9 では、 R が S 字の形をしているため、同一の α に、3 つ

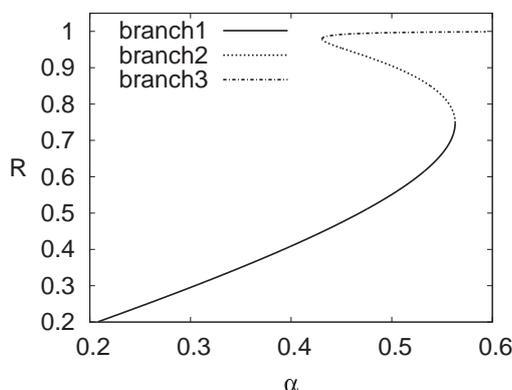


図 9 RS 解の共存 ($T = T_0 = 0.05$).

の解が共存する領域がみられる。

以後、RS 解が共存している時、 R の α 依存性を見た場合に RS 解の形状が S 字状であれば、図 9 で示すように RS 解のそれぞれの分枝を下側から順に branch 1, branch 2, branch 3 と呼ぶことにする。branch 3 ではオーバーラップ R はほぼ 1 を達成していることから、解が共存することによって小さな値の α (ユーザー数と比べてチップ数が少ない場合) であっても、復調結果の性能が良いことを示す解が存在することが分かる。

解が共存する場合には、熱力学的に安定な解を決定するため、それぞれの branch の自由エネルギーを比較し、自由エネルギー最小のものを探す必要がある。また、それぞれの branch についてレプリカ対称性の破れが生じていないか調べる必要がある。図 9 の各 branch の自由エネルギーに関しては、それぞれを数値的に求めた結果 $\alpha = \alpha_{th} = 0.503$ で branch 1 と branch 3 の自由エネルギーが一致し $\alpha < \alpha_{th}$ で branch 1 が $\alpha_{th} < \alpha$ で branch 3 が自由エネルギー最小となった。本論分では、 $\alpha_{th} = 0.503$ のように自由エネルギーが一致する点を熱力学的転移点と呼び、自由エネルギーが最小となる解を熱力学的に安定な解と呼ぶ。

8.2 スピノーダルライン

低温での RS 解の詳細を明らかにするため、まず、branch 1 と 2 の境界の α (図 10 の垂直な実線) と branch 2 と 3 の境界の α (図 10 の垂直な点線) を求め、パラメータ空間中に共存領域を図示することを試みた (導出は付録 B)。このラインは、スピノーダルラ

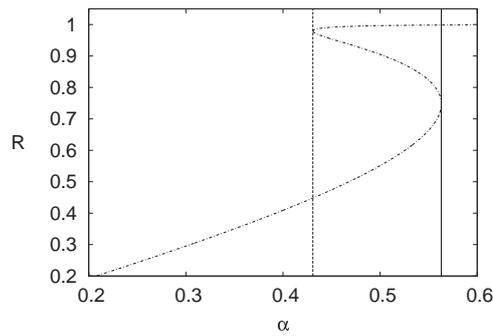


図 10 RS 解の共存領域の境界.

インと呼ばれる。

$T_0 = 0$ の場合はすでに詳細に調べられており [13]、その時の (α, T) 空間におけるスピノーダルラインは図 11 のようになる。ここで、branch 1 と branch 2 の境界線を $\alpha = \alpha_{1,2}(T)$ とし、実線で表す。また、branch 2 と branch 3 の境界線を $\alpha = \alpha_{2,3}(T)$ とし、点線で表す。 $\alpha_{2,3}(T) < \alpha_{1,2}(T)$ である。図 11 から分かるように、解が共存する α

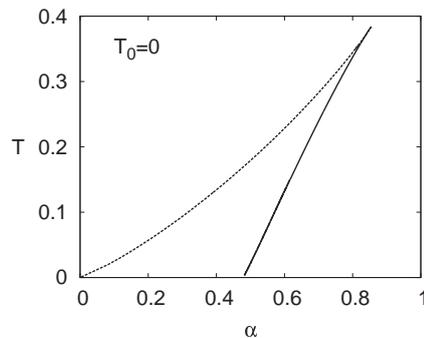


図 11 $T_0 = 0$ でのスピノーダルライン. 実線: $\alpha_{1,2}(T)$, 点線: $\alpha_{2,3}(T)$.

の範囲は、 $T = T_0 = 0$ の時最大になり、 T が高温になるにつれて徐々に狭まっている。

我々は、 $T_0 \neq 0$ の場合の RS 解の共存について調べた (図 12)。 T_0 を 0 から上げていく

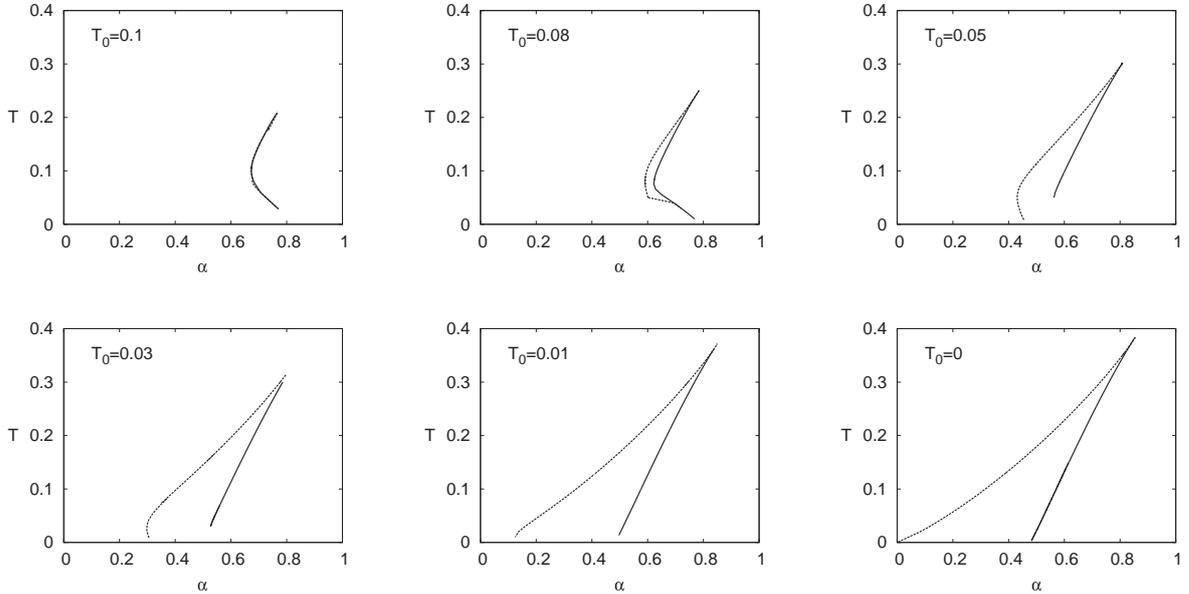


図 12 スピノーダルライン. 実線: $\alpha_{1,2}(T)$, 点線: $\alpha_{2,3}(T)$.

と、解が共存する温度 T の上限は徐々に下がっていった。それに伴い、 (α, T) 空間中の解の共存領域も小さくなり、 $T_0 = 0.1$ でほとんど無くなった。また branch 2 と branch 3 の境界である $\alpha = \alpha_{2,3}(T)$ は $T = T_0$ 付近で最小値をとることが分かった。これは、 $T = T_0$ の時、branch 3 の解が出現する α の値が最も小さくなることを意味している。一方、図 12 のいくつかの図では、 T が低温のところでは branch 1 と branch 2 との境界を描いていない。なぜなら、これらの場合には、解が図 9 に示したものと異なる構造をもつため、branch 1、2 が適切に定義できなくなるからである。異なる構造が出現し始めるのは、 T が T_0 と一致する付近であった。次節で、この状況を説明する。

8.3 解の構造

図 13 は $T = T_0 = 0.03$ 近傍での R の α 依存性をみたものである。図 13 の左図、中央図のひとつながりの S 字状の解を解 A と呼ぶことにする。図 12 のスピノーダルラインは解 A について調べたものである。左図、中央図には、解 A の他に閉じた曲線からなる解が現れている。これを解 B と呼ぶことにする。中央図、右図から分かるように、解 A と B は $T \simeq T_0$ で連結し、組み換えが起こっている。右図では、組み換え後のひとつながり

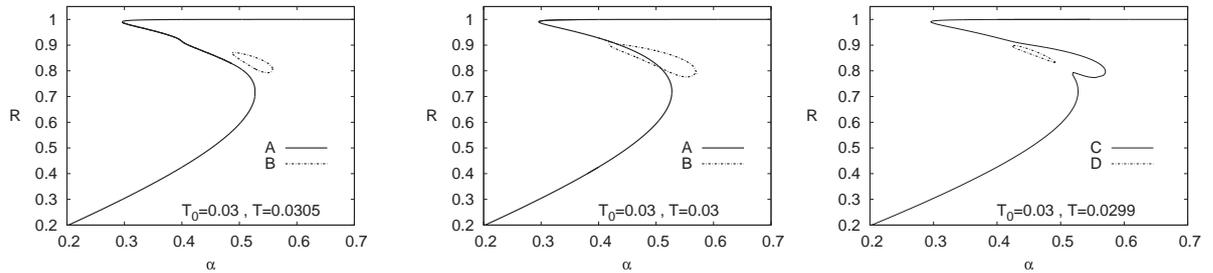


図 13 R の α 依存性. $T = T_0 = 0.03$ 付近の解の様子. 左図, 中央図: 解 A (実線), 解 B (一点鎖線). 右図: 解 C (実線), 解 D (一点鎖線).

の解を解 C、解 C とは別の閉じた曲線からなる解を解 D と表している。

今度は、 R の T 依存性を見る。図 14 は、 $T_0 = 0.03$ 、 $\alpha = 0.54$ (左図)、 $\alpha = 0.52$ (右図) の R の T 依存性を示している。左図より、 T 依存性を見た場合にも、ひとつながりの解

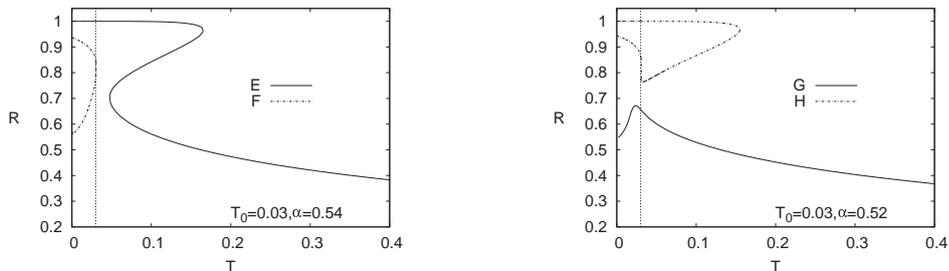


図 14 $T_0 = 0.03$ での解の T 依存性. 垂直に引かれた線は $T = T_0$ を示している. 左図: 解 E (実線), 解 F (一点鎖線). 右図: 解 G (実線), 解 H (一点鎖線).

(解 E と呼ぶ) の他に、 $T \leq T_0$ で存在する解があることが分かる。 $T \leq T_0$ で出現する解を解 F と呼ぶことにする。 R の T 依存性を見た場合に得られる解 E については、解 E の各分枝は下側から順に R の α 依存性における branch 1、branch 2、branch 3 と対応する。スピノーダルラインが示すように、解 E の branch 1 と branch 2 の境界は α が小さくなるにつれて低温側に動く。境界が $T = T_0$ 付近に達すると、図 14 右図のように解 E は解 F と連結し、組み換えが起こる。右図では、組み換え後の下 (R が小さい) 側の解は解 G、上 (R が大きい) 側の解は解 H と表している。このように、 $T \sim T_0$ で解の組み換えが起こることで、branch 1 と branch 2 が定義できなくなり、連続したスピノーダルラインを描けなくなる。このような領域については、解の組み換えの構造をより詳細に調べることが必要であり、これは、将来の課題として残されている。

8.4 レプリカ対称性の破れ

レプリカ対称性は負のエントロピーの出現や AT 不安定性が生じることで破れる。ここでは、低温領域での RS 解の安定性について調べた結果を示す。

RS 解のエントロピー s_{RS} は自由エネルギーを温度 T で偏微分したものとして次のように定義する。

$$\begin{aligned} s_{\text{RS}} &= -\frac{\partial}{\partial T} f_{\text{RS}} \\ &= \frac{\hat{R}(1-q-2R)}{2} - \hat{q}(1-q) - \frac{\alpha}{2} \ln(1+\beta(1-q)) \\ &\quad + \int Dz \ln\left(2 \cosh(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R})\right). \end{aligned} \quad (23)$$

AT 安定性については、レプリコンモードでの安定条件として次のように表される [17] (導出は付録 C)。

$$\lambda \equiv \frac{\alpha\beta^2}{(1+\beta(1-q))^2} \int Dz \operatorname{sech}^4(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R}) - 1 < 0. \quad (24)$$

零エントロピーライン、AT ラインはそれぞれ $s_{\text{RS}} = 0$ 、 $\lambda = 0$ として定義される。

図 15 上段は、RS 解の共存領域のない $T_0 = 0.2$ での、 (α, T) 空間における AT ラインと零エントロピーラインを描いたものである。図 15 下段は、 $T_0 = 0.05$ での、 (α, T) 空間におけるスピノーダルライン、AT ラインと零エントロピーラインをあわせて描いたものである。AT ラインの下側が AT 不安定領域、零エントロピーラインの下側が負のエントロピーが出現するフリージング領域に対応する。

まず、 $T_0 = 0.2$ の場合に注目する (図 15 上段)。この場合は、RS 解は T や α の値によらず 1 つの branch からなる。AT ラインと零エントロピーラインは、なだらかな山型をしており、2 つのラインは $\alpha = \alpha_c^{(1)} = 0.65$ 付近で交わっている。そのため、温度 T を下げていくと、 $\alpha < \alpha_c^{(1)}$ ではフリージングが、 $\alpha > \alpha_c^{(1)}$ では AT 不安定性が先に起こることが分かる。このように、 (α, T) 空間に RS 解の共存がない場合に AT ラインと零エントロピーラインが交わるときには、その交点 $\alpha_c^{(1)}$ を境にして、低温で、フリージングによるレプリカ対称性破れが生じる α の領域と AT 不安定性によるレプリカ対称性破れが生じる α の領域に分かれることが分かった。

次に、RS 解が共存する $T_0 = 0.05$ の AT ラインと零エントロピーラインに注目する (図 15 下段)。2 つのラインはそれぞれひとつながりになっており、スピノーダルライン

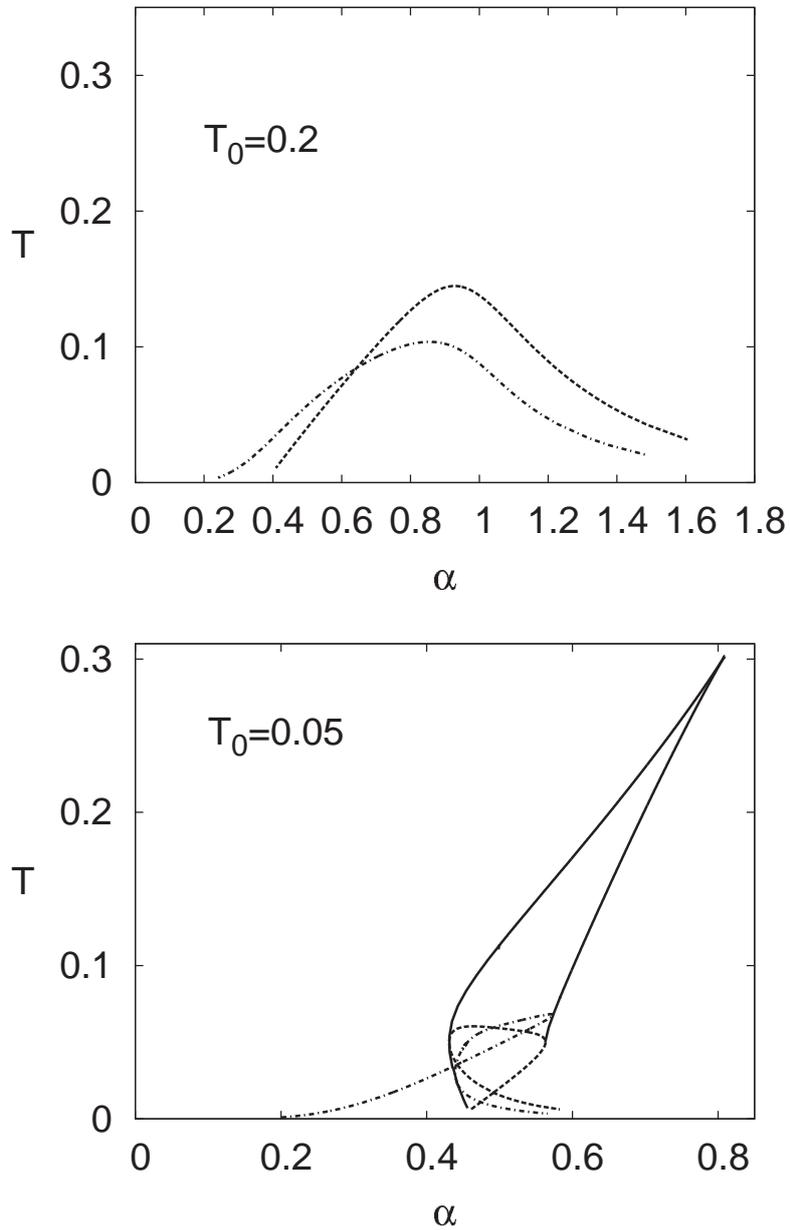


図 15 スピノーダルライン (実線), AT ライン (点線) と零エントロピーライン (一点鎖線). 上図: $T_0 = 0.2$. 下図: $T_0 = 0.05$.

$\alpha_{1,2}(T)$ と $\alpha_{2,3}(T)$ 上で折り返す。右側のスピノーダルライン $\alpha_{1,2}(T)$ 上の折り返し点の近傍においては、AT ラインと零エントロピーラインの各々について、下側のラインが branch 1、上側のラインが branch 2 である。また、 $\alpha_{2,3}(T)$ 上の折り返し点の近傍においては、各々のラインについて下側のラインが branch 3、上側のラインが branch 2 であ

る。共存領域内では、 $T_0 = 0.05$ では、branch 2 の AT ラインと零エントロピーラインが $\alpha = \alpha_c^{(2)} = 0.49$ 付近で交っており、温度 T を下げていくと、branch 1 と $\alpha_c^{(2)} < \alpha$ の branch 2 でフリージングが、branch 3 と $\alpha_c^{(2)} > \alpha$ の branch 2 で AT 不安定性が先に起こることがわかる。

各 branch についての AT 安定性やエントロピーの正負は、 T_0 によって様々に異なるので詳細には立ち入らないが、 T_0 によらない共通の特徴を 1 つあげる。それは、AT ラインが、温度 $T = T_0$ の西森温度の時、 $\alpha_{2,3}(T), \alpha_{1,2}(T)$ で折り返すことで、これは、理論的に Tanaka によって証明されている [5]。

このように、我々は低温領域で AT 不安定性とフリージングという 2 種類の状況によってレプリカ対称性の破れが出現することを見出した。 α, T_0 が定まっている時、 T が十分高温ではどちらのレプリカ対称性の破れも起こらない。 T を下げていくと、 α や T_0 に依存して AT 不安定性やフリージングが起こる。 T を小さくしていったとき、AT 不安定性が最初に起こる場合を case 1、フリージングが最初に起こる場合を case 2 と呼ぶことにする。

8.4.1 AT 不安定性が生じる場合 (case 1)

各々の case について、1RSB 解の導出を行う。

まず、case 1 を考える。レプリカ対称性 1 回破れ (One-step replica symmetry breaking, 1RSB) を仮定すると、自由エネルギー f_{1RSB} と鞍点方程式は次のようになる (詳細は付録 D)。

$$\begin{aligned}
-\beta f_{1RSB}(q_1, \hat{q}_1, q_0, \hat{q}_0, R, \hat{R}, m, \beta, \beta_0, \alpha) = & \alpha \left(-\frac{1}{2} \ln(1 + \beta(1 - q_1)) \right. \\
& - \frac{1}{2m} \ln \left(\frac{\varphi}{1 + \beta(1 - q_1)} \right) - \frac{\beta(1 + q_0 - 2R + \beta_0^{-1})}{2\varphi} + \frac{\beta}{2}(1 + \beta_0^{-1}) \Big) \\
& - \frac{\hat{q}_1}{2} + \frac{1}{m} I + \frac{1-m}{2} \hat{q}_1 q_1 - \frac{m}{2} \hat{q}_0 q_0 - R \hat{R}, \tag{25}
\end{aligned}$$

$$q_1 = \int Dz \frac{1}{K} \int Dt \Omega^m \tanh^2(\sqrt{\hat{q}_0} z + \sqrt{\hat{q}_1 - \hat{q}_0} t + \hat{R}), \tag{26}$$

$$q_0 = \int Dz \left\{ \frac{1}{K} \int Dt \Omega^m \tanh(\sqrt{\hat{q}_0} z + \sqrt{\hat{q}_1 - \hat{q}_0} t + \hat{R}) \right\}^2, \tag{27}$$

$$R = \int Dz \frac{1}{K} \int Dt \Omega^m \tanh(\sqrt{\hat{q}_0} z + \sqrt{\hat{q}_1 - \hat{q}_0} t + \hat{R}), \tag{28}$$

$$\hat{q}_1 = \alpha \beta^2 \frac{q_1 - q_0}{(1 + \beta(1 - q_1)) \varphi} + \hat{q}_0, \tag{29}$$

$$\hat{q}_0 = \frac{\alpha\beta^2(1 + \beta_0^{-1} + q_0 - 2R)}{\varphi^2}, \quad (30)$$

$$\hat{R} = \frac{\alpha\beta}{\varphi}, \quad (31)$$

$$\frac{(\hat{q}_1 - \hat{q}_0)\{1 + \beta(1 - q_1) + m\beta q_1\}}{2\beta} = \frac{\alpha}{2m} \ln \left(\frac{\varphi}{1 + \beta(1 - q_1)} \right) - \frac{1}{m} I + \int Dz \frac{1}{K} \int Dt \Omega^m \ln \Omega, \quad (32)$$

$$\varphi = 1 + \beta(1 - q_1) + m\beta(q_1 - q_0),$$

$$I = \int Dz \ln K, \quad K = \int Dt \Omega^m, \quad \Omega = 2 \cosh(\sqrt{\hat{q}_0}z + \sqrt{\hat{q}_1 - \hat{q}_0}t + \hat{R}).$$

8.4.2 フリージングが生じる場合 (case 2)

case 2 の場合は、イジングパーセプトロンにおける場合と同様に、Krauth-Mézard 極限 $q_1 \rightarrow 1, \hat{q}_1 \rightarrow \infty$ を考慮した [18]。これは仮定であるが、以下で示す数値計算の結果により、この仮定は妥当であると思われる。この時、自由エネルギーは次の形になる。

$$f_{1RSB}(q_1 = 1, \hat{q}_1 = \infty, q_0, \hat{q}_0, R, \hat{R}, m, \beta, \beta_0, \alpha) = f_{RS}(q_0, m^2 \hat{q}_0, R, m\hat{R}, m\beta, \beta_0, \alpha). \quad (33)$$

鞍点方程式は、RS 解にエントロピー零の条件 $s_{RS} = 0$ を課したものとなる。これらの方程式の解を $q_c, \hat{q}_c, R_c, \hat{R}_c$ と β_c として表すと、1RSB 解は次の形で表される。

$$q_0 = q_c, \quad \hat{q}_0 = m^{-2} \hat{q}_c, \quad R = R_c, \quad \hat{R} = m^{-1} \hat{R}_c, \quad m = \frac{\beta_c}{\beta}.$$

$m \leq 1$ なので、 T の範囲が $T \leq T_c$ (β の範囲で $\beta \geq \beta_c$) のとき、1RSB 解が存在する。

8.4.3 鞍点方程式の数値解

我々は、低温領域で、レプリカ対称性が2通りの方法で破れることを見出した。ここでは、レプリカ対称性が破れる領域での解の様子を示す。

はじめに、 T_0 を固定した (α, T) 空間の全ての領域で RS 解が共存しない場合を調べる。

$T_0 = 0.2$ とする。まず R の T 依存性を見る。AT ラインと零エントロピーラインの交点の α を $\alpha = \alpha_c^{(1)}$ とすると、 $T_0 = 0.2$ では図 15 の上段より、温度 T を下げていくと、 $\alpha > \alpha_c^{(1)}$ では case 1 のレプリカ対称性の破れが起こり、 $\alpha < \alpha_c^{(1)}$ では case 2 のレプリカ対称性の破れが起こる。図 16 左図は case 1 が起こる場合 (図 17 左図の実線の垂

線上)、図 16 右図は case 2 が起こる場合 (図 17 左図の点線の垂線上) の、RS 解および 1RSB 解における R の T 依存性を示したものである。図 16 より、RS 解の R の値はレ

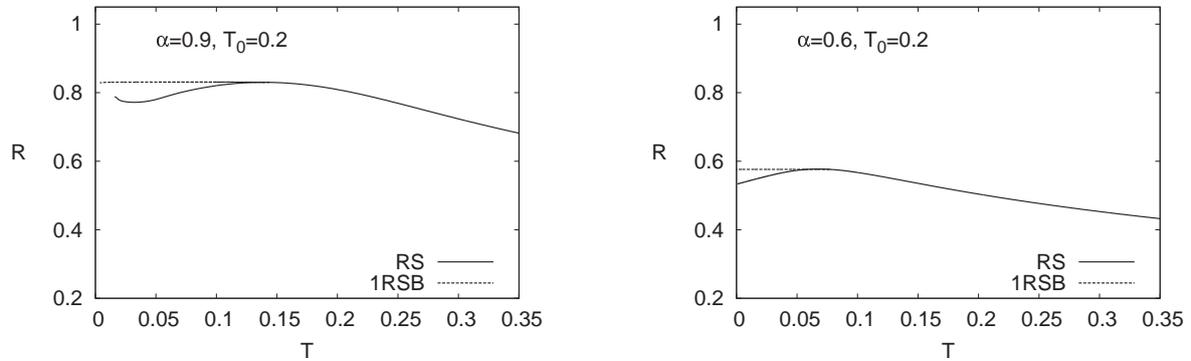


図 16 R の T 依存性. 実線:RS 解,点線:1RSB 解,左図: case 1. $\alpha = 0.9, T_0 = 0.2$
 . 右図: case 2. $\alpha = 0.6, T_0 = 0.2$.

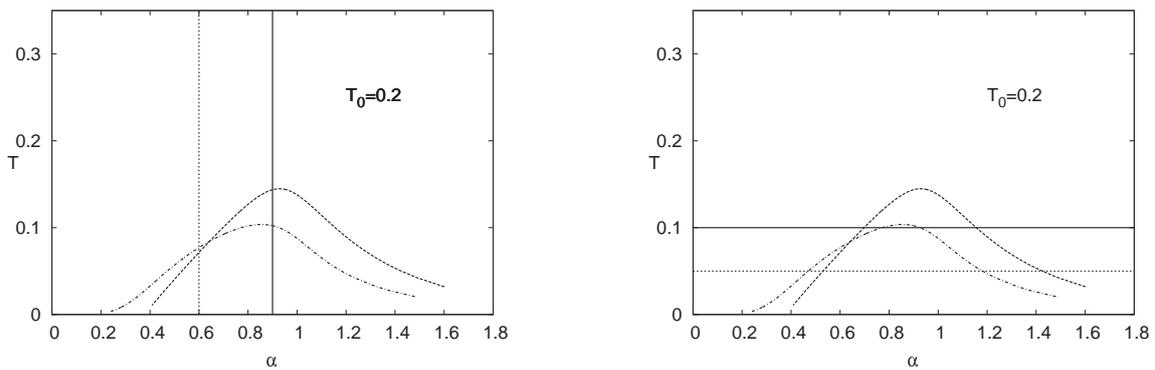


図 17 スピノーダライン (実線), AT ライン (点線) と零エントロピーライン (一点鎖線). $T_0 = 0.2$. 左図: 垂直な実線は $\alpha = 0.9$, 垂直な点線は $\alpha = 0.6$ を示している. 右図: 水平な実線は $T = 0.1$, 水平な点線は $T = 0.05$ を示している.

プリカ対称性が破れる点までは T の低下に伴い、大きくなること分かる。 $\alpha = 0.9$ (左図)、 $\alpha = 0.6$ (右図) のどちらの場合も、レプリカ対称性が破れる点から低温にかけては、RS 解の R のよりも 1RSB 解の R の方が値が大きいが、全ての T において RS 解、1RSB 解共に R は 1 に達していない。1RSB 解の振る舞いは、case 1、case 2 の違いに依らず良く似ている。

次に R の α 依存性の結果を示す。図 18 左図は AT ラインと零エントロピーラインの交点の温度よりも高温の T ($T = 0.1$ 、17 右図の実線の垂線上) での結果である。図 18 右図は 2 つのラインの交点よりも低温の T ($T = 0.05$ 、図 17 右図の点線の垂線上) の結果である。図 17 右図より $T_0 = 0.2$, $T = 0.1$ では、レプリカ対称性の破れは case 1 のみが起こ

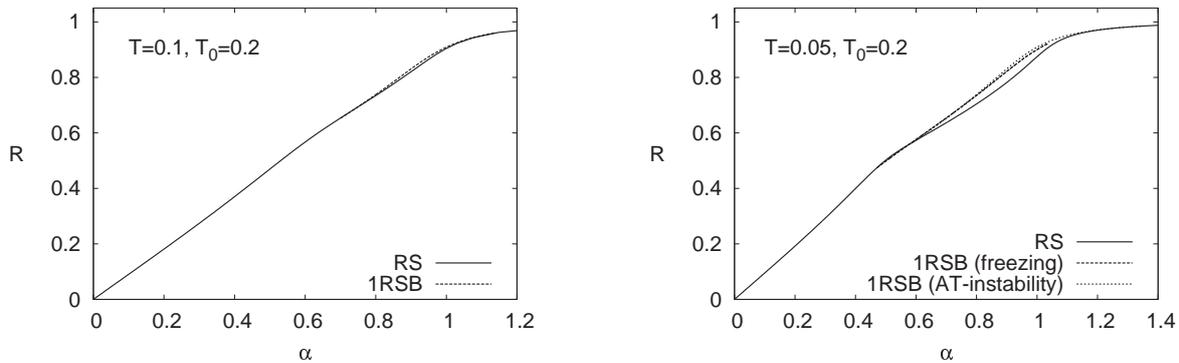


図 18 R の α 依存性. 実線:RS 解, 点線:1RSB 解, 左図: $T = 0.1, T_0 = 0.2$. 右図: $T = 0.05, T_0 = 0.2$.

る。 $T_0 = 0.2$, $T = 0.05$ では、 α が $0.47 < \alpha < 1.18$ では case 2、 α が $1.18 < \alpha < 1.42$ では case 1 の 1RSB 解が出現する。図 18 より、 R の値は、 α が大きくなるに従って大きくなり 1 に近づく。1RSB 解の R は、case 1、case 2 のどちらの場合も、RS 解よりも大きな値をとっているが、RS 解と 1RSB 解の R の値の差は小さい。

次に、 T_0 を固定した (α, T) 空間中に RS 解の共存領域が存在する場合を調べる。 $T_0 = 0.05$ とし、 $\alpha = 0.55, 0.5, 0.45$ での R の T 依存性を見る。図 19 左図のそれぞれの垂線に注目する。 T を下げていくとき、垂線が AT ライン、零エントロピーラインと最初に交わるのは、 $\alpha = 0.55$ と $\alpha = 0.5$ では、branch 2 の零エントロピーライン、 $\alpha = 0.45$ では、branch 2 の AT ラインである。しかし、自由エネルギーの大小関係を考慮すると、branch 2 の自由エネルギーは他の branch よりも常に大きいので、熱力学的に安定な解の振る舞いを調べるためには branch 1 と branch 3 に注目するべきである。branch 1 と branch 3 に注目すると、 $\alpha = 0.55, 0.5, 0.45$ の全ての垂線は branch 1 の零エントロピーラインと最初に交わることが分かる。そこで、 $\alpha = 0.55, 0.5, 0.45$ での R の T 依存性における 1RSB 解は、RS 解の branch 1 の case 2 の 1RSB 解のみを図示することにする。図 20 左図は $T_0 = 0.05$, $\alpha = 0.55$ の場合 (図 19 左図の実線の垂線上)、図 20 中央図は $T_0 = 0.05$, $\alpha = 0.5$ の場合 (図 19 左図の点線の垂線上)、図 20 右図は

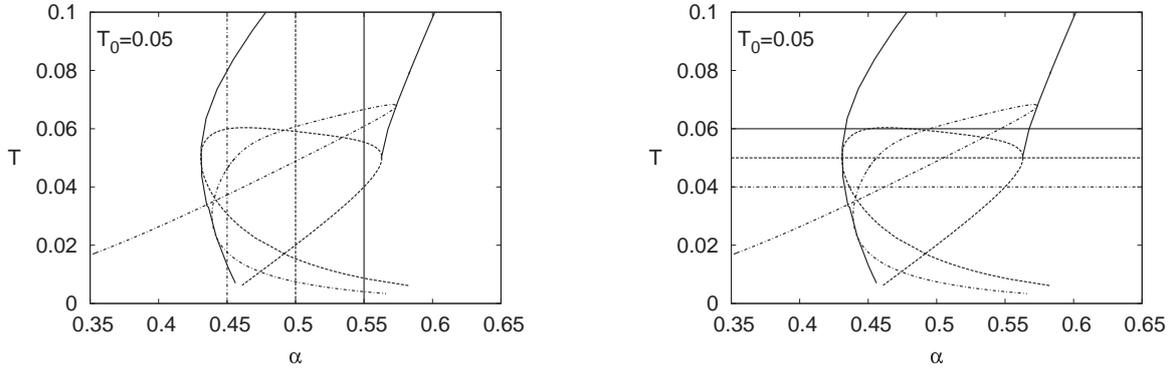


図 19 $T_0 = 0.05$ でのスピノーダルライン (実線), AT ライン (点線) と零エントロピーライン (一点鎖線). 左図: 垂直な実線は $\alpha = 0.55$, 垂直な点線は $\alpha = 0.5$, 垂直な一点鎖線は $\alpha = 0.45$. 右図: 水平な実線は $T = 0.06$, 水平な点線は $T = 0.05$, 水平な一点鎖線は $T = 0.04$.

$T_0 = 0.05$, $\alpha = 0.45$ の場合 (図 19 左図の一点鎖線の垂線上) の RS 解および 1RSB 解における R の T 依存性を示したものである。図 20 の RS 解は、図 14 右図と同様の解の

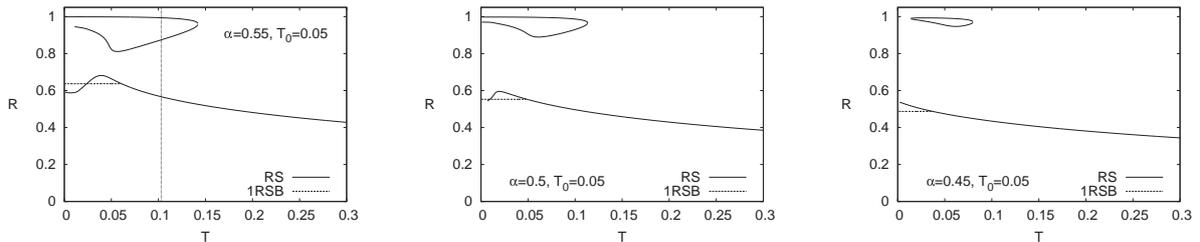


図 20 R の T 依存性. $T_0 = 0.05$. 実線:RS 解, 点線:1RSB 解, 左図: $\alpha = 0.55$, 中央図: $\alpha = 0.5$, 右図: $\alpha = 0.45$.

組み換えが起こっている。 $\alpha = 0.45$ の場合に注目すると、図 14 右図の解 G に対応する解が閉曲線解となり $T > 0.01$ で存在するので、 $T \leq 0.01$ では解が共存していない。図 19 のスピノーダルラインにおいて、branch 2 と branch 3 の境界を示すスピノーダルラインが $T = T_0$ で「く」の字型に折れるのは、低温で解 G に対応する解が閉曲線解になるためであると考えられる。RS 解の自由エネルギーを数値的に比較すると、 $\alpha = 0.55$ では $T = T_{th} = 0.103$ で図 20 左図の一番下側の RS 解 と一番上側の RS 解の自由エネルギーが一致する。また、フリージングが生じる温度を $T = T_s$ とすると、 $\alpha = 0.55$ では、

$T_{th} > T_s$ であった。したがって、 T を下げていくとき、熱力学的に安定な解は T_{th} で一番下側の RS 解から一番上側の RS 解に移ることが分かる。一方、 $\alpha = 0.5, 0.45$ では図 20 中央図、右図中の RS 解の各 branch の自由エネルギーを数値的に比較すると一番下側の RS 解と一番上側の RS 解の自由エネルギーの大きさはほぼ同じであるが、一番下側の RS 解の方がわずかに小さいことが分かった。case 2 の 1RSB 解の自由エネルギーは温度 T_s における一番下側の RS 解の自由エネルギーと等しい。 T_s よりもわずかに低温で一番上側の RS 解の自由エネルギーと case 2 の 1RSB 解の自由エネルギーを比較すると、一番上側の RS 解の方が小さかった。このことから、 $\alpha = 0.5, 0.45$ では、フリージング温度 T_s で一番下側の RS 解から一番上側の RS 解へ自由エネルギー最小の解が転移すると考えられる。

図 19 左図より、 $\alpha < 0.45$ では branch 3 の AT 不安定性が branch 1 のフリージングよりも高温で起こる領域が存在するが、 R の T 依存性を調べると、branch 3 の RS 解は自由エネルギーが最小ではないため、branch 1 の RS 解のフリージングに注目すればよい。

最後に RS 解が共存する場合の R の α 依存性を調べた。図 21 左図に $T_0 = 0.05, T = 0.06$ の場合 (図 19 右図の実線の垂線上)、図 21 中央図に $T_0 = 0.05, T = 0.05$ の場合 (図 19 右図の点線の垂線上)、図 21 右図に $T_0 = 0.05, T = 0.04$ の場合 (図 19 右図の一点鎖線の垂線上) の RS 解および 1RSB 解における R の α 依存性を示す。図 21 中央図は

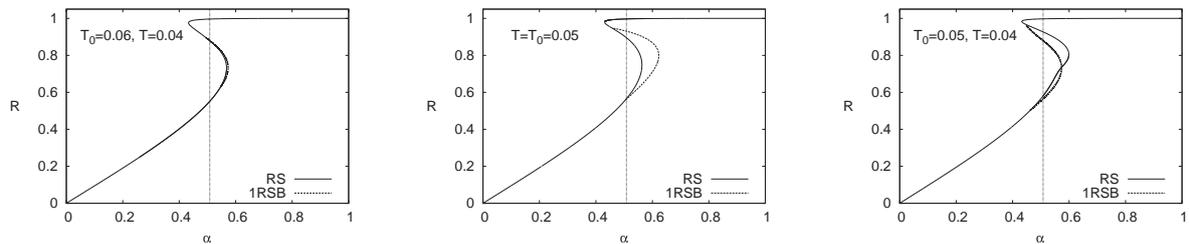


図 21 R の α 依存性. $T_0 = 0.05$. 実線:RS 解, 点線:1RSB 解, 左図: $T = 0.06$, 中央図: $T = 0.05$ (西森温度), 右図: $T = 0.04$.

$T_0 = T = 0.05$ の西森温度での結果である。図 21 右図の $T = 0.04$ での R の α 依存性をみると、図 13 右図の解 C と同じ組み換えが起こった解が得られていることが分かる。ここで、図 19 右図のそれぞれの水平線と AT ライン、零エントロピーラインに注目する。ただし、branch 2 は、自由エネルギーが他の branch よりも常に大きいので branch 2 の AT ライン、零エントロピーラインは除いて考える。このとき、 $T = 0.06, 0.05$ では、水平線が branch 1 の零エントロピーラインと交わる。 $T = 0.04$ では、水平線は最初に branch

3のATラインと交わり、次にbranch 1の零エントロピーラインと交わる。ATラインとの交点を $\alpha = \alpha_a$ 、零エントロピーラインとの交点を $\alpha = \alpha_s$ とすると、 $T = 0.06, 0.05$ では、branch 1は常にAT安定であるが、 $\alpha > \alpha_s$ ではエントロピーが負、branch 3は常にAT安定かつエントロピー正である。また $T = 0.04$ では、branch 1は常にAT安定であるが、 $\alpha > \alpha_s$ ではエントロピーが負、branch 3はエントロピー正であるが、 $\alpha > \alpha_a$ ではAT不安定である。 $T = T_0$ の西森温度に注目すると、branch 1でフリージングによるレプリカ対称性の破れが存在しうることが分かる。これは注目に値する。なぜなら、Nishimoriによって西森温度で、レプリカ対称解が常に安定であることが示されているからである [19]。ここで、各解の熱力学的安定性に注目する。図 20 中央図の垂直に引かれた点線は、RS 解の branch 1 の自由エネルギーと branch 3 の自由エネルギーが数値的に一致する α の値 α_{th} を示している。 $\alpha < \alpha_{th}$ で branch 1 が、 $\alpha > \alpha_{th}$ で branch 3 が自由エネルギー最小である。 α_s と α_{th} を数値的に比較すると、その差は小さいが、 $\alpha_{th} < \alpha_s$ であった。つまり、 $T = T_0$ では α を 0 から大きくしていくと、熱力学的転移がフリージングによる 1RSB 解が出現する直前の α で起こるので、西森温度において、フリージングによって現れる branch 1 の 1RSB 解は準安定であることが分かる。従って、この結果は西森ライン上でレプリカ対称性が破れないという Nishimori の結論 [19] と矛盾しない。 $T = 0.06$ でも、 $\alpha_{th} < \alpha_s$ であり、branch 1 から branch 3 への熱力学的転移が先に起こる。一方、 $T = 0.04$ では、 $\alpha_s < \alpha_{th}$ より、熱力学的転移よりも先にフリージングが生じる。 $\alpha_s < \alpha$ で出現する case 2 の 1RSB 解の自由エネルギーは branch 1 の RS 解の自由エネルギーと等しいので、 $\alpha_s < \alpha < \alpha_{th}$ で case 2 の 1RSB 解が自由エネルギー最小となる。したがって、この領域では、case 2 の 1RSB 解が熱力学的に安定な解であることが分かる。

9 数値シミュレーション

この章では、数値シミュレーションを行い、前章までに得られた理論解とシミュレーション結果との比較を行う。

9.1 シミュレーション方法

我々はアニーリング法によるモンテカルロシミュレーションを実行した。まず、シミュレーションの方法を簡単に述べる。アニーリングは $T = 1$ からスタートして、下げ幅 ΔT を $\Delta T = 0.01$ として温度 T を下げていった。他の下げ方 (温度 T の逆数 β を 1 からス

タートして、 $\Delta\beta = 1$ で 200 まで変えた場合) を行った場合でも、以下で示すものと同様の結果を得ている。システムサイズについてもいくつかの値をとって調べたが、この論文では、 $N = 400$ の結果を示す。これより大きな N の値でも、 $N = 400$ の場合と同様の結果を得ている。

情報ビット $\{\eta_i\}$ と拡散符号 $\{\xi_i^\mu\}$ 及び情報ビットの推定値の初期値 $\{s_i\}$ は、各々バイアスのない同じ分布から独立に生成したのものを使用した。ノイズ $\{n^\mu\}$ はガウス分布から生成した。情報ビット $\{\eta_i\}$ を固定し、拡散符号 $\{\xi_i^\mu\}$ 、ガウスノイズ $\{n^\mu\}$ と情報ビットの推定値の初期値 $\{s_i\}$ が異なる 100 個のサンプルについて調べた。

9.2 結果 1 -解が共存しない領域-

まず、RS 解が共存しない場合について調べた。最初に R の T 依存性を調べた理論結果、図 16 に対応するシミュレーション結果を図 22 に示す。図 22 左図は $\alpha = 0.9, T_0 = 0.2$ (case 1 のレプリカ対称性破れが起こる場合)、図 22 右図は $\alpha = 0.6, T_0 = 0.2$ (case 2 のレプリカ対称性破れが起こる場合) におけるオーバーラップ R の T 依存性のシミュレーション結果である。どちらの場合も T が高温の領域では、RS 解とシミュレーション結果

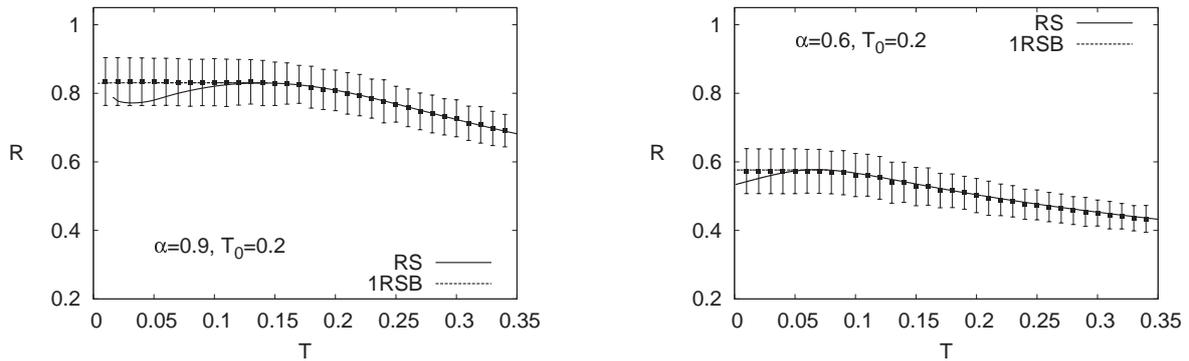


図 22 R の T 依存性. 実線:RS 解, 点線:1RSB 解, *:シミュレーション ($N = 400$, サンプル数 100. 線分はエラーバー). 左図: case 1. $\alpha = 0.9, T_0 = 0.2$. 右図: case 2. $\alpha = 0.6, T_0 = 0.2$.

は良く一致していることが分かる。また、1RSB 解が出現する領域では、エラーバーの範囲内に RS 解と 1RSB 解が含まれているが、シミュレーション結果の平均値は 1RSB 解と良く一致している。

次に R の α 依存性を調べた理論結果、図 18 に対応する R の α 依存性のシミュレ-

シミュレーション結果を図 23 に示す。 $T = 0.1, T_0 = 0.2$ の時 (左図) は、1RSB 解が出現する領域

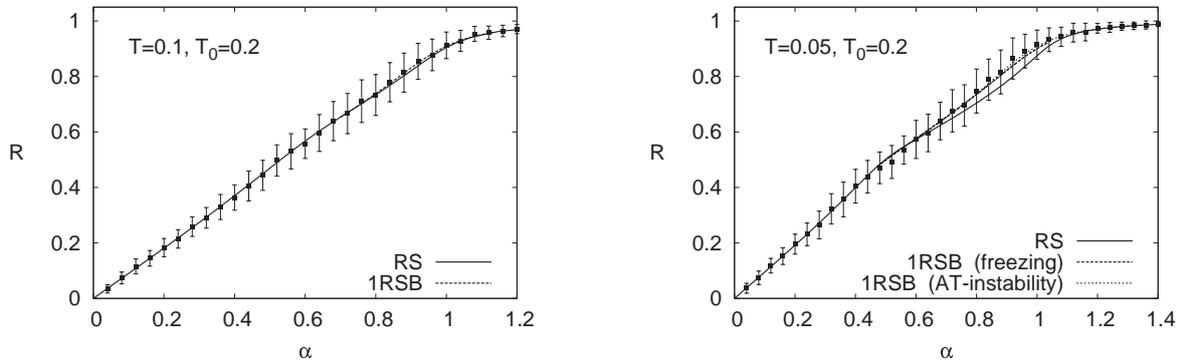


図 23 R の α 依存性. 実線:RS 解, 点線:1RSB 解, *:シミュレーション ($N = 400$, サンプル数 100. 線分はエラーバー). 左図: $T = 0.1, T_0 = 0.2$. 右図: $T = 0.05, T_0 = 0.2$.

で、RS 解と 1RSB 解がほぼ等しいため、シミュレーションの結果がどちらの解を実現しているかは判別できない。 $T = 0.05, T_0 = 0.2$ の時 (右図) は、1RSB 解が出現する領域でのシミュレーション結果は、エラーバーの範囲内に RS 解と 1RSB 解を含んでいるが、シミュレーションの平均値は 1RSB 解と一致している。

以上のように、RS 解が共存しない場合は、RS 解が安定な領域では、シミュレーション結果と RS 解はよく一致するという結果が得られた。レプリカ対称性が破れる領域では、RS 解と 1RSB 解は、ともにシミュレーション結果と誤差の範囲で一致しており、いずれが実現しているかを判別することは困難であった。

9.3 結果 2 -解が共存する領域-

次に RS 解が共存する場合について調べた。図 24 は R の T 依存性を調べた理論結果、図 20 に対応する $T_0 = 0.05, \alpha = 0.55$ (左図)、 $T_0 = 0.05, \alpha = 0.5$ (中央図)、 $T_0 = 0.05, \alpha = 0.45$ (右図) におけるオーバーラップ R の T 依存性のシミュレーション結果である。高温側では、シミュレーション結果は、熱力学的に安定な RS 解と良く一致していることが分かる。温度 T を下げていくと $\alpha = 0.55$ では、 $T_{th} = 0.103$ で下側の RS 解から上側の RS 解の一番上の branch へ熱力学的転移が起こり、 $\alpha = 0.5, 0.45$ ではフリージング領域では熱力学的に安定な解は一番下側の RS 解から一番上側の RS 解へ移るが、シミュレーションではいずれの場合も下側の解にトラップされているように見え

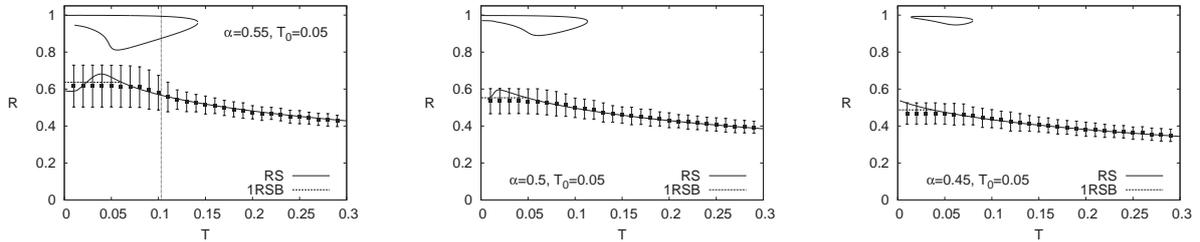


図 24 R の T 依存性. 実線:RS 解, 点線:1RSB 解, *:シミュレーション ($N = 400$, サンプル数 100. 線分はエラーバー), 垂線: 熱力学的転移点. 左図: $T_0 = 0.05, \alpha = 0.55$, 中央図: $T_0 = 0.05, \alpha = 0.5$, 右図: $T_0 = 0.05, \alpha = 0.45$.

る。シミュレーション結果の平均値に注目すると、 $\alpha = 0.55, 0.5, 0.45$ の全ての場合で $T = 0.07$ 以下のプロットの値がほぼ同じになっており、エラーバーの長さもほとんど等しい。これは、シミュレーション結果が $T = 0.07$ 以下で準安定状態にトラップされているためと考えられる。

$\alpha = 0.55$ では $T = T_{th}$ での熱力学的転移が確認できなかった。転移温度 T_{th} がどれくらいの温度であれば我々が用いたアニーリングスケジュールによるシミュレーションで熱力学的転移が見られるのか調べたところ、 $T_0 = 0.05, \alpha = 0.7$ のように $T_{th} = 0.2$ 以上の場合に熱力学的転移が見られた (図 25)。熱力学的転移温度や AT 不安定領域、フリーズ

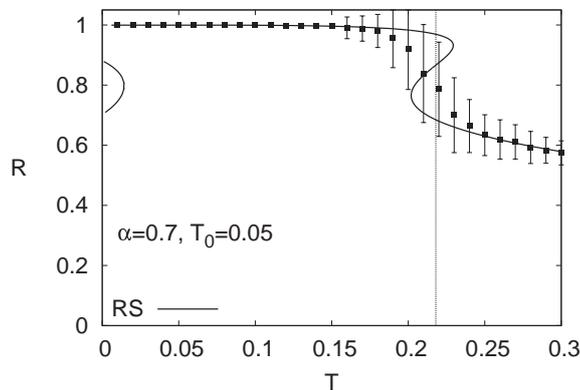


図 25 R の T 依存性. 実線:RS 解, 点線:1RSB 解, *:シミュレーション ($N = 400$, サンプル数 100. 線分はエラーバー), 垂線: 熱力学的転移点. $T_0 = 0.05, \alpha = 0.7$.

ング領域の出現温度が低温の場合は、シミュレーションで、解の低温での様子を見るため

には、アニーリングスケジュールを適切にとらなければならないといえる。

次に R の α 依存性を調べた理論結果、図 21 に対応するシミュレーション結果を図 26 に示す。図 26 の左図は $T_0 = 0.05$, $T = 0.06$ 、中央図は $T_0 = T = 0.05$ 、右図は $T_0 = 0.05$, $T = 0.04$ の結果である。 $T = 0.06$ と $T = 0.05$ では、case 2 が生じる前に熱

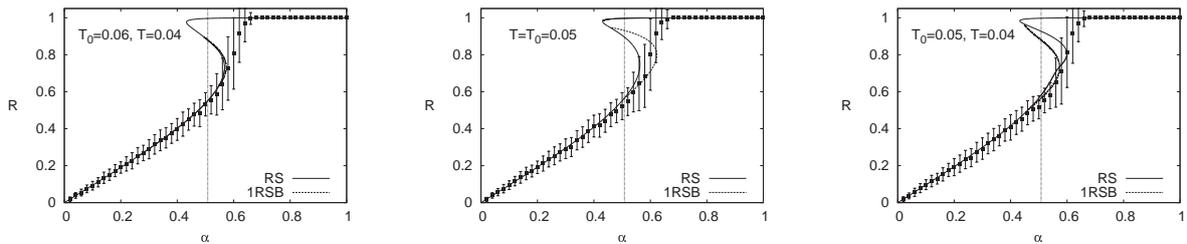


図 26 R の α 依存性. 実線:RS 解, 点線:1RSB 解, *:シミュレーション ($N = 400$, サンプル数 100. 線分はエラーバー), 垂線: 熱力学的転移点. 左図: $T_0 = 0.05$, $T = 0.06$, 中央図: $T_0 = 0.05$, $T = 0.05$, 右図: $T_0 = 0.05$, $T = 0.04$.

力学的転移が起こる。図 26 左図、中央図より、熱力学的転移点よりも α が小さな領域と RS 解の branch 3 のみが存在する α の大きな領域では、シミュレーション結果と RS 解が良く一致していることが分かる。しかし、熱力学的転移点よりも α が大きく、1RSB 解が出現している領域では、シミュレーション結果は準安定な 1RSB 解にトラップされているように見える。熱力学的転移をシミュレーションで実現するには、適切なアニーリングスケジュールをとる必要があるといえる。また、1RSB 解が生じている領域でのシミュレーション結果はエラーバーが大きいの。その原因を調べるために、 $T_0 = T = 0.05$ で各サンプルのオーバーラップ R の度数分布をみたところ (図 27)、 $\alpha = 0.6$ ではほとんどのサンプルが branch 3 の RS 解になるが、 $\alpha = 0.55, 0.57$ では、準安定解にトラップされているものと、branch 3 の RS 解を実現しているものが存在していることが分かった。これが、エラーバーが大きくなる原因であると考えられる。

$T = 0.04$ では、熱力学的転移点 α_{th} よりもフリージング点 α_s の方が小さいので、 $\alpha_s < \alpha < \alpha_{th}$ では 1RSB 解が熱力学的に安定な解である。図 26 右図より、シミュレーション結果からは RS 解と 1RSB 解の差が小さいので、どちらが実現されているか判別することは困難である。また、 $T_0 = 0.04$ の場合もアニーリングスケジュールが適切でないことが原因で、 $\alpha > \alpha_{th}$ であっても、シミュレーション結果は準安定な解にトラップされていることが分かる。

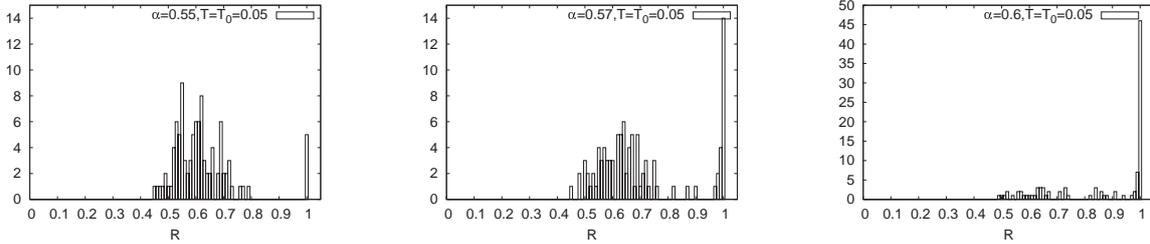


図 27 $T = T_0 = 0.05$ での R の度数分布. $N = 400$, サンプル数 100. 左図: $\alpha = 0.55$. 中央図: $\alpha = 0.57$. 右図: $\alpha = 0.6$.

10 まとめ

我々は、低温における DS-CDMA モデルの MPM 復調器の性能評価問題を調べた。性能評価の指標には、真の情報信号とその推定値のオーバーラップ R を用いた。また、モンテカルロシミュレーションを行い、シミュレーション結果と理論結果との比較を行った。

まず、レプリカ対称解 (RS 解) の R の低温での振る舞いについてまとめる。

低温で、 R の α 依存性を見ると、RS 解が S 字型になり解が共存する。RS 解が S 字型を示す場合、解の 3 つの分枝を R が小さいものから順に branch 1、branch 2、branch 3 と呼んだ。我々は、 T_0 を固定した (α, T) 空間でスピノーダルラインを描くことで、解の共存領域のパラメータ範囲を示した。共存領域は $T_0 \leq 0.1$ で見付き、さらに $T = T_0$ 付近では、RS 解が組み換えを起こし、それによって、解が複雑な構造を持つことが分かった。

レプリカ対称解の安定性については、 T_0 を固定した (α, T) 空間で AT ラインと零エントロピーラインを描き、低温領域でのレプリカ対称性の破れには、AT 不安定性によるもの (case 1) とエントロピーが負になるもの (case 2) との 2 通りがあることが分かった。

(α, T) 空間で RS 解が共存しない領域では、AT ラインと零エントロピーラインが 1 点で交わることで、温度 T を下げることで case 1 が起こる領域と case 2 が起こる領域が生じることを示した。

一方、 (α, T) 空間で RS 解が共存する領域では、case 1 と case 2 のどちらが起こるかは α 、 T 、 T_0 のパラメータに依存して異なっていた。しかし、我々が確認した範囲では、はじめにレプリカ対称性が破れるのは branch 1 の case 2 による場合がほとんどであった。branch 1 で case 2 が起こることによって出現するフリージング 1RSB 解は、西森ライン

($T = T_0$) 上においても観測された。この時、 α を大きくしていくと、フリージングの直前に、RS 解の branch 1 から branch 3 への熱力学的転移が見られ、1RSB 解は準安定状態になることが分かった。ところで、Nishimori により、西森ライン上ではレプリカ対称性は破れないという結果が得られている [19]。しかしながら、これは自由エネルギー最小解についての主張であり、今の場合、branch 1 の RS 解から生じる 1RSB 解は準安定状態であるため、ここでの結果は Nishimori の結果と矛盾しない。西森温度以外については、 $T > T_0$ では、 α を大きくしていくと、熱力学的転移がフリージングよりも先に起こるが、 $T < T_0$ の領域の中では、 α を大きくすると、熱力学的転移よりも先にフリージングが起こり、熱力学的に安定な case 2 の 1RSB 解が出現することが確認された。

次に、理論結果とシミュレーション結果との比較をまとめる。シミュレーションは、アニーリング法によるモンテカルロシミュレーションを行った。

まず、RS 解が共存しない場合のシミュレーション結果をまとめる。 R の T 依存性と α 依存性を調べた結果は、RSB 解が出現しない領域では理論結果の RS 解とシミュレーション結果はよく一致していた。一方、RSB 解が出現する領域では、case 1、case 2 のどちらのレプリカ対称性の破れが生じる場合でも、シミュレーション結果の平均値は 1RSB 解とよく一致していた。ただし、この場合の RS 解と 1RSB 解は、その差が小さいので両方がシミュレーションの誤差の範囲に入り、シミュレーションからは、両者を区別することはできなかつた。したがって、このような場合は RS 解と 1RSB 解の性能はほぼ等しいとみなすことができる。

次に、RS 解が共存する場合のシミュレーション結果についてまとめる。 R の T 依存性の結果からは、高温ではシミュレーションと RS 解はよく一致するが、低温ではアニーリングスケジュールが適切でないことが原因で、シミュレーション結果が準安定状態にトラップされ、熱力学的転移などの様子を確認できないことが分かった。 R の α 依存性の結果については、ほとんどの領域でシミュレーション結果は熱力学的に安定な解とよく一致していたが、熱力学的転移は、固定した温度 T_0 、 T が低い場合には見られず、準安定な 1RSB 解が出現する α の領域では、1RSB 解にトラップされる様子が見られることが分かった。このことも、シミュレーションに用いたアニーリングスケジュールが適切でないことが原因であると考えられる。我々は、様々なアニーリングスケジュールをとってシミュレーションを行ったが、低温で熱力学的転移が観測されるようなスケジュールは未だ得られていない。適切なアニーリングスケジュールの探索は今後の課題である。

第 III 部

FH-CDMA - スパースな拡散符号をもつ CDMA モデル-

11 はじめに

第 3 部では、周波数ホッピング CDMA (FH-CDMA) を考慮する。DS-CDMA モデルと同様に統計力学の枠組みで性能評価を行うため、まず FH-CDMA のモデル化を行う。モデル化は、FH 方式の拡散符号を 0 以外の値を持つ要素が非常に少ないというスパースな場合の DS 方式の拡散符号とみなして行う。第 2 部で扱った DS-CDMA モデルでは、拡散符号の全ての要素が +1 か -1 の値を持っていた。以後、拡散符号の疎密から、第 2 部で扱ったモデルは密な拡散符号を持つ DS-CDMA モデルと呼び、ここで扱うモデルはスパースな拡散符号を持つ DS-CDMA モデルと呼ぶ。

我々は、密な拡散符号を持つ DS-CDMA モデルの解析手法を基にして、スパースな拡散符号を持つ DS-CDMA モデルの性能評価指標の導出を行う。さらに、数値的に求めた性能評価指標とモンテカルロシミュレーション結果との比較を行う。

我々は、レプリカ法を用いて解析を行った結果、送信情報信号の推定値が真の情報信号とどれだけ違っているかを示す指標であるビット誤り率と通信路が送れる情報の最大値を表す通信路容量を導出した。ビット誤り率 P_b は、第 2 部で性能評価指標として用いたオーバーラップ R と $P_b = \frac{1-R}{2}$ の関係になっている。ビット誤り率については数値的に求めたものとモンテカルロシミュレーションの結果とを比較し、両者がよく一致するという結果を得た。

第 3 部は以下の構成になっている。まず、次章でスパースな拡散符号を持つ DS-CDMA モデルについて説明する。第 1 3 章ではレプリカ解析による性能評価指標の導出を行う。第 1 4 章では、理論結果を数値的に求める方法を示し、また数値解とシミュレーション結果との比較を行う。最後に 1 5 章で第 3 部の内容をまとめる。

12 モデル化

ここでは、我々が用いた FH-CDMA モデルを示す。FH 方式の拡散符号は、定められた搬送波 (キャリア) の周波数帯をホップするパターンのことである。以後、搬送波の周波数をキャリア周波数と呼ぶ。拡散符号のチップ数はホップ回数が対応する。拡散符号の

各チップの要素には、キャリア周波数帯分の自由度がある。図 28 は、拡散符号のチップ

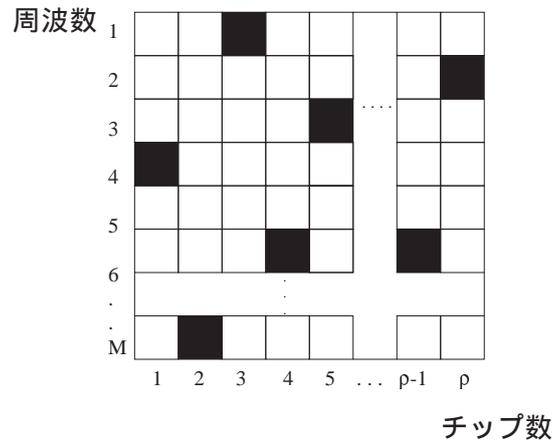


図 28 あるユーザーの周波数ホップパターン (拡散符号) . 周波数 M , 拡散チップ数 ρ . 各チップで周波数が 1 つ選択される (黒い領域) .

数を ρ 、キャリア周波数の数を M とし、拡散符号を模式的に表したものである。このように、FH 方式の拡散符号は M 行 ρ 列の行列形式で表すことができる。この行列の要素を a_{mg} , $m = 1, \dots, M$; $g = 1, \dots, \rho$ とする。各列の要素は、選択された周波数に対応する要素以外は全て 0 をとる。つまり、この行列で 0 以外の値を持つ要素は各列に付き 1 つである。複数のユーザーが同じ周波数の通信路を重複して使うことになるのは、拡散符号のチップと周波数が一致する場合であるので、ユーザーの情報の重ね合わせは、各 (mg) の組ごとに表す必要がある。図 29 のように行列要素を 1 列に $\{a_{11}, \dots, a_{M1}, a_{12}, \dots, a_{M2}, \dots, a_{1\rho}, \dots, a_{M\rho}\}$ と並べると、これは、 $p \equiv M \times \rho$ 個のチップ数を持つ 1 次元的に表された DS 方式の形式をした拡散符号になっている。我々は、FH-CDMA のモデルとし

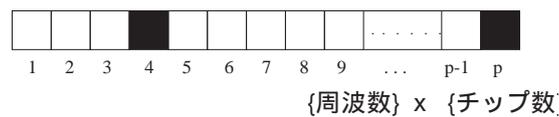


図 29 拡散符号を 1 次元的に表したもの.

て、 M 行 ρ 列の行列で表される拡散符号の代わりに、チップ数 $p = M \times \rho$ 個の 1 次元的に表された拡散符号を採用する。このように定義される p 個の要素からなる拡散符号列

は、 M が ρ に比べて十分大きい場合には、0 以外の値を持つ要素の数が非常に少ないスパースな系列となる。受信信号系列 $\{y^\mu; \mu = 1, \dots, p\}$ は、次式で表される。

$$y^\mu = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \eta_i + n^\mu \quad (\mu = 1, \dots, p). \quad (34)$$

ここでユーザー i の情報信号を η_i 、拡散符号を $\{\xi_i^\mu; \mu = 1, \dots, p\}$ とし、通信路の加法的ノイズを $\{n^\mu; \mu = 1, \dots, p\}$ とおいている。また、規格化定数は $1/\sqrt{\rho}$ とする。次の記号 $\mathbf{y} \equiv (y^1, \dots, y^p)^T$, $\boldsymbol{\eta} \equiv (\eta_1, \dots, \eta_N)^T$, $\mathbf{n} \equiv (n^1, \dots, n^p)^T$, $(\Xi)_{\mu i} \equiv \xi_i^\mu, \mu = 1, \dots, p$; $i = 1, \dots, N$ を導入する (T は転置を表す) と、(34) 式は次のように表される。

$$\mathbf{y} = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \Xi \boldsymbol{\eta} + \mathbf{n}.$$

FH 方式における拡散符号では、 $M \times \rho$ 個の要素中、 M 個毎に 1 つが値を持つことになり、その値は選ばれた周波数に対応する。しかし、以下では、簡単のため図 30 のように、0 以外の値を持つ要素は、 $M \times \rho$ 個中にランダムに ρ 個散らばっているとす。ま

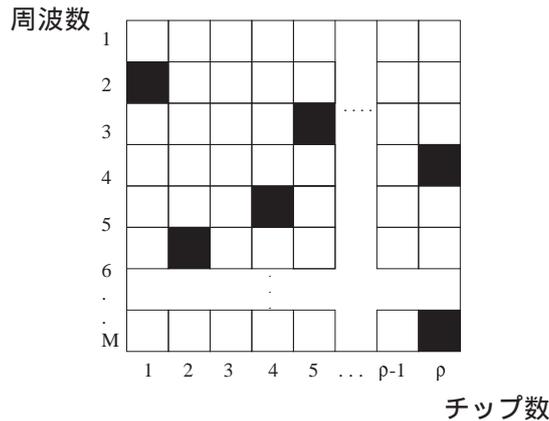


図 30 以下で取り扱う拡散符号。

た、各要素の値は、キャリア周波数のそれぞれの値に対応するのであるが、ここでは、特定の確率分布に従って値を与えるとする。各ユーザーの拡散符号の要素の値の分布は次式を用いる。

$$p(\xi) = (1 - \frac{\rho}{N})\delta(\xi) + \frac{\rho}{N}\pi(\xi).$$

右辺第 1 項は、拡散符号が 0 をとる確率、第 2 項は、拡散符号が 0 以外の値をとる確率を

表している。ただし、系列全体では0以外の値を持つ要素が厳密に ρ 個となるように条件を課す。ここで、右辺第2項の $\pi(\xi)$ は要素に0以外の値を与える確率密度関数である。

このように表したスパースな拡散符号を持つ DS-CDMA モデルについて、以下では、統計力学的手法を用いた性能評価指標の導出を行う。

13 性能評価

前章で定義したスパースな拡散符号を持つ DS-CDMA モデルについて、復調結果の性能を評価する指標の導出を行う。

以下の条件を仮定する。ノイズは平均0、分散 σ_0^2 の加法的白色ガウスノイズとする。送信する情報信号 η は任意の事前分布 $p(\eta)$ に従うとする。

また、情報信号の推定値を $s \equiv (s_1, s_2, \dots, s_N)^T$ とする。

ガウスノイズを考えているので、 η の条件のもとでの y の分布 $p(y|\eta; \Xi)$ は次のように表される。

$$p(y|\eta; \Xi) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \right)^p \exp \left(-\frac{1}{2\sigma_0^2} \left\| y - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \Xi \eta \right\|^2 \right). \quad (35)$$

また、 s の条件のもとでの y の分布 $p(y|s; \Xi)$ は

$$p(y|s; \Xi) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^p \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left\| y - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \Xi s \right\|^2 \right) \quad (36)$$

となる。分散 σ^2 は真のガウスノイズの分散 σ_0^2 とは一般に異なる。温度パラメータを $T_0 = \beta_0^{-1} = \sigma_0^2$, $T = \beta^{-1} = \sigma^2$ と定義する。また、ユーザー数と拡散符号のチップ数の比 $\frac{p}{N}$ を α とおく。

この時、事後分布はベイズの公式の(7)式より、

$$p(s|y; \Xi) = (Z(y; \Xi))^{-1} p(y|s; \Xi)p(s), \quad (37)$$

$$Z(y; \Xi) = \int ds p(y|s; \Xi)p(s). \quad (38)$$

と表される。 $Z(y; \Xi)$ は分配関数である。

ここで、 $N, p \rightarrow \infty$ の大システム極限において自己平均性が成り立っていると仮定し、1ユーザー当たりの自由エネルギーの平均値

$$f = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta N} [\log Z]. \quad (39)$$

を計算する。ここで $[\cdot]$ は、送信した情報信号、拡散符号とノイズについての平均を表わす。

13.1 レプリカ解析

恒等式

$$[\log Z] = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial n} \log [Z^n] \quad (40)$$

より、(39) 式を次のように変形する。

$$-\beta f = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial n} \log [Z^n]. \quad (41)$$

まず、 $[Z^n]$ を計算する (詳細は付録 E)。 n 個のレプリカ変数 $\mathbf{s}_a = (s_{1a}, \dots, s_{Na})^T$, $a = 1, \dots, n$ を導入する。

$$Z^n = \prod_{a=1}^n \int d\mathbf{s}_a p(\mathbf{y}|\mathbf{s}_a; \Xi) p(\mathbf{s}_a). \quad (42)$$

このとき、 $[Z^n]$ は、

$$[Z^n] = \mathbb{E}_{\Xi} \left\{ \int \left(\int p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\eta}; \Xi) p(\boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} \right) \left(\int \prod_{a=1}^n p(\mathbf{y}|\mathbf{s}_a; \Xi) p(\mathbf{s}_a) d\mathbf{s}_a \right) d\mathbf{y} \right\} \quad (43)$$

と表せる。ここで、 \mathbb{E}_{Ξ} は、拡散符号 Ξ についての平均を表す。

拡散符号の p 個の要素中、 ρ 個が 0 以外の値を持つ場合、 $[Z^n]$ は

$$[Z^n] = \int \left(\frac{1}{(2\pi)^n} \int d\boldsymbol{\omega} e^{-\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \Sigma \boldsymbol{\omega}} \delta(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{1}) P(\boldsymbol{\omega}) \right)^p d\mathbf{c}(\mathbf{x}) \mu(\mathbf{c}(\mathbf{x})) \quad (44)$$

となる。ここで、 Σ , $P(\boldsymbol{\omega})$, $\mu(\mathbf{c}(\mathbf{x}))$ は

$$\begin{aligned} \Sigma &= \text{diag}(\beta_0^{-1}, \beta^{-1}, \dots, \beta^{-1}), \\ P(\boldsymbol{\omega}) &= \frac{1}{\mathcal{N}^{\frac{N}{p}}} \exp\left(-\frac{\rho}{\alpha} \left\{ 1 - \int d\mathbf{s} c(\mathbf{x}) \int d\xi \pi(\xi) (e^{i\xi \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{s}}{\sqrt{\rho}}}) \right\}\right), \\ \mu(\mathbf{c}(\mathbf{x})) &= \int \frac{N}{2\pi i} d\tilde{c}(\mathbf{x}) \exp\left(-N \left\{ \int \tilde{c}(\mathbf{x}) c(\mathbf{x}) d\mathbf{s} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \log \left(\int d\mathbf{s} p(\boldsymbol{\eta}) \prod_{a=1}^n p(\mathbf{s}_a) \frac{(\tilde{c}(\mathbf{x}))^\rho}{\rho!} \right) \right\}\right) \end{aligned}$$

であり、 $c(\mathbf{x})$ はオーダーパラメータ関数、 $\tilde{c}(\mathbf{x})$ はそれに共役な関数である。ここで $\mathbf{x} \equiv (\eta, s_1, \dots, s_n)^T$ とおいている。

(44) 式は、 $c(\mathbf{x})$ と $\tilde{c}(\mathbf{x})$ についての積分があるが、 N が大きい極限では鞍点法により積分を評価できる。極限 $\lim_{N \rightarrow \infty}$ と $\lim_{n \rightarrow 0}$ の順番の入れ替えが可能であると仮定すると、極限 $\lim_{N \rightarrow \infty}$ で鞍点評価ができるので $[Z^n]$ は次のように表される [20]。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log [Z^n] = \sup_{c(\mathbf{x})} \{ \alpha \mathcal{G}(c(\mathbf{x})) - \mathcal{I}(c(\mathbf{x})) \}. \quad (45)$$

ここで、 $\mathcal{G}(c(\mathbf{x}))$, $\mathcal{I}(c(\mathbf{x}))$ は

$$\mathcal{G}(c(\mathbf{x})) = \log \int \exp \left(-\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \Sigma \boldsymbol{\omega} \right) \delta(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{1}) P(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} - n \log 2\pi, \quad (46)$$

$$\mathcal{I}(c(\mathbf{x})) = \sup_{\tilde{c}(\mathbf{x})} \left\{ \int \tilde{c}(\mathbf{x}) c(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \log \rho! - \log \left(\int d\mathbf{x} p(\boldsymbol{\eta}) \prod_{a=1}^n p(s_a) (\tilde{c}(\mathbf{x}))^\rho \right) \right\} \quad (47)$$

である。

13.2 レプリカ対称解

ここでは、送信情報が $+1$ と -1 からなり、事前分布が一様分布 $p(\boldsymbol{\eta}) = p(s) = \frac{1}{2^N}$ の場合について具体的に解を求める。

まず、 $c(\mathbf{x})$, $\tilde{c}(\mathbf{x})$ について、導入した n 個のレプリカの添字 $a = 1, \dots, n$ の入れ替えに依存しない解であるレプリカ対称解 (RS 解) を次のように仮定する。

$$c^{\text{RS}}(\mathbf{x}) = \int P(h) \frac{e^{h\boldsymbol{\eta} \sum_{a=1}^n s_a}}{2(2 \cosh h)^n} dh, \quad (48)$$

$$\tilde{c}^{\text{RS}}(\mathbf{x}) = \int \tilde{P}(\tilde{h}) \frac{e^{\tilde{h}\boldsymbol{\eta} \sum_{a=1}^n s_a}}{2(2 \cosh \tilde{h})^n} d\tilde{h}. \quad (49)$$

次の (50)、(51) 式を満たすとき、鞍点解 $P(h)$, $\tilde{P}(\tilde{h})$ を決定する方程式 (鞍点方程式) が得られる。

$$\frac{\delta}{\delta \tilde{P}(\tilde{h})} \{ \alpha \mathcal{G}(c^{\text{RS}}(\mathbf{x})) - \mathcal{I}(c^{\text{RS}}(\mathbf{x})) \} = 0, \quad (50)$$

$$\frac{\delta}{\delta P(h)} \{ \alpha \mathcal{G}(c^{\text{RS}}(\mathbf{x})) - \mathcal{I}(c^{\text{RS}}(\mathbf{x})) \} = 0. \quad (51)$$

$P(h)$, $\tilde{P}(\tilde{h})$ の鞍点方程式は

$$\tilde{P}(\tilde{h}) = \int Dz \sum_{L=1}^{\infty} \frac{(\frac{\rho}{\alpha})^{L-1} e^{-\frac{\rho}{\alpha}}}{(L-1)!} \int d\xi_L \bar{\pi}(\xi_L) \left(\prod_{l=1}^{L-1} dh_l P(h_l) d\xi_l \bar{\pi}(\xi_l) \right)$$

$$\times \delta \left(\tilde{h} - \frac{1}{2} \log \frac{\Omega(1)}{\Omega(-1)} \right), \quad (52)$$

$$P(h) = \int \cdots \int \left(\prod_{c=1}^{\rho-1} d\tilde{h}_c \tilde{P}(\tilde{h}_c) \right) \delta \left(h - \sum_{c=1}^{\rho-1} \tilde{h}_c \right) \quad (53)$$

である（導出は付録 F）。ここで、

$$\begin{aligned} \bar{\pi}(\xi) &= \frac{1}{2} \{ \pi(\xi) + \pi(-\xi) \}, \\ \Omega(\tau) &= \sqrt{2\pi\beta} \left(\prod_{l=1}^{L-1} (1 + \tanh h_l) \right) \frac{1}{2^L} \sum_{\boldsymbol{\tau}=\{-1,1\}^{L-1}} \exp \left(\sum_{l=1}^{L-1} (\tau_l - 1) h_l \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_0}} z + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left\{ \sum_{l=1}^{L-1} \xi_l (\tau_l - 1) + \xi_L (\tau - 1) \right\} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

この時、1 ユーザー当たりの自由エネルギーの平均値 f_{RS} は次式のようにになる。

$$\begin{aligned} -\beta f_{\text{RS}} &= \alpha \int Dz \sum_{L=0}^{\infty} \frac{(\frac{\rho}{\alpha})^L e^{-\frac{\rho}{\alpha}}}{L!} \int \cdots \int \log \{ (\Omega(1) + \Omega(-1)) \\ &\quad \times \left(1 + \tanh \left(\frac{1}{2} \log \frac{\Omega(1)}{\Omega(-1)} \right) \tanh h_L \right) \} \left(\prod_{l=1}^L dh_l P(h_l) d\xi_l \bar{\pi}(\xi_l) \right) \\ &\quad - \alpha \log 2\pi + \rho \log 2 \\ &\quad - \rho \int \int \log(1 + \tanh h \tanh \tilde{h}) P(h) \tilde{P}(\tilde{h}) dh d\tilde{h} \\ &\quad + \int \cdots \int \left(\prod_{c=1}^{\rho} d\tilde{h}_c \tilde{P}(\tilde{h}_c) \right) \log \left\{ \frac{\cosh(\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_c)}{\prod_{c=1}^{\rho} \cosh \tilde{h}_c} \right\}. \quad (54) \end{aligned}$$

真の情報信号 $\boldsymbol{\eta}$ とその事後推定値 $\langle \boldsymbol{s} \rangle$ とのオーバーラップ R は、

$$R_a = \frac{1}{N} \left[\frac{\sum_{\boldsymbol{s}_\gamma} \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{s}_a \prod_{\gamma=1}^n e^{-\beta \mathcal{H}(\boldsymbol{s}_\gamma)}}{\sum_{\boldsymbol{s}_\gamma} \prod_{\gamma=1}^n e^{-\beta \mathcal{H}(\boldsymbol{s}_\gamma)}} \right]$$

より、

$$R = \int \cdots \int \prod_{c=1}^{\rho} [d\tilde{h}_c \tilde{P}(\tilde{h}_c)] \tanh \left(\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_c \right)$$

となる。オーバーラップ R とビット誤り率の関係は $P_b = \frac{1-R}{2}$ より、ビット誤り率は次

のように表される（導出は付録 G）

$$P_b = \frac{\left(1 - \int \prod_{c=1}^{\rho} \left(d\tilde{h}_c \tilde{P}(\tilde{h}_c)\right) \tanh\left(\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_c\right)\right)}{2}. \quad (55)$$

この CDMA 通信路の理論的通信路容量を導出する（詳細は付録 H）。まず、ユーザー i が 1 度に送る情報量、つまりユーザー i の情報率を r_i とおく。ここで $r = r_i, i = 1, \dots, N$ を仮定する。この時、次の関係式が成り立つことが知られている [5]。

$$\sum_{i=1}^N r_i = Nr \leq I_{\max}(\mathbf{X}; \mathbf{y}). \quad (56)$$

ここで、 $I(\mathbf{X}; \mathbf{y})$ は受信信号にどれだけ送信情報が含まれるかの度合いを表す相互情報量であり、 $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_N\}$, $X_i \equiv \{\eta_i, s_i\}$ である。CDMA 通信路の通信路容量 C は相互情報量の最大値 $I_{\max}(\mathbf{X}; \mathbf{y})$ から次のように表される。

$$C \equiv \frac{1}{N} I_{\max}(\mathbf{X}; \mathbf{y}). \quad (57)$$

我々は、大システム極限での通信路容量を評価する。

相互情報量は次のように情報エントロピーを用いて表すことができる。

$$I(\mathbf{X}; \mathbf{y}) = H(\mathbf{y}) - H(\mathbf{y}|\mathbf{X}). \quad (58)$$

微分エントロピー $H(\mathbf{y}|\mathbf{X})$ はノイズのエントロピー $H(\mathbf{n})$ に等しいので

$$H(\mathbf{n}) = \frac{p}{2} \left(1 + \log \frac{2\pi}{\beta_0}\right) \quad (59)$$

と表される。一方、 \mathbf{y} の情報エントロピー $H(\mathbf{y})$ は次のように定義される。まず、真の \mathbf{y} のとる確率分布を $p_0(\mathbf{y})$ とおく。これは、分散 σ_0^2 のガウスノイズ通信路を通して得られた受信信号 \mathbf{y} の分布である。分散の推定値が σ^2 である通信路から予測される \mathbf{y} の分布を $p(\mathbf{y})$ とすると、情報エントロピーは

$$H(\mathbf{y}) = - \int d\mathbf{y} p_0(\mathbf{y}) \log_2 p(\mathbf{y}) \quad (60)$$

となる。 $p_0(\mathbf{y}) = \int d\boldsymbol{\eta} p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\eta}; \Xi) p(\boldsymbol{\eta})$, $p(\mathbf{y}) = \int d\mathbf{s} p(\mathbf{y}|\mathbf{s}; \Xi) p(\mathbf{s}) = Z(\mathbf{y}; \Xi)$ より、

$$\begin{aligned} H(\mathbf{y}) &= - \int d\mathbf{y} \int d\boldsymbol{\eta} p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\eta}; \Xi) p(\boldsymbol{\eta}) \log_2 \left\{ \int d\mathbf{s} p(\mathbf{y}|\mathbf{s}; \Xi) p(\mathbf{s}) \right\} \\ &= - \int d\mathbf{y} \int d\boldsymbol{\eta} p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\eta}; \Xi) p(\boldsymbol{\eta}) \log_2 \{Z(\mathbf{y}; \Xi)\} \end{aligned} \quad (61)$$

である。これを評価するために、大システム極限で自己平均性が成り立っていると仮定すると、1ユーザー当たりの情報エントロピー $\frac{1}{N}H(\mathbf{y})$ は拡散符号 Ξ のランダム性について平均をとった1ユーザー当たりの情報エントロピー $\mathbb{E}_{\Xi}(\frac{1}{N}H(\mathbf{y}))$ と等しくなる。大システム極限で Ξ のランダム性について平均をとった1ユーザー当たりの情報エントロピーを \hat{H} とおく。

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\Xi} \left(\frac{1}{N} H(\mathbf{y}) \right) \\ &= - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E}_{\Xi} \left(\int d\mathbf{y} \int d\boldsymbol{\eta} p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\eta}; \Xi) p(\boldsymbol{\eta}) \log_2 \{Z(\mathbf{y}; \Xi)\} \right).\end{aligned}\quad (62)$$

これは、対数関数の底が2であることを除けば、自己平均性を仮定した場合の1ユーザー当たりの自由エネルギー βf_{RS} に等しい。 \hat{H} と βf_{RS} との関係は $\hat{H} = \beta f_{\text{RS}} \log_2 e$ である。

相互情報量は、通信路の状態が既知の場合に最大になるので、相互情報量を最大化する \hat{H} は $\hat{H}_{\beta=\beta_0}$ である。

したがって、(57)、(58) 式より、大システム極限の通信路容量 \mathcal{C} は次式となる。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{C} = \hat{H}|_{\beta=\beta_0} - \frac{\alpha}{2} \left(1 + \log \frac{2\pi}{\beta_0} \right).\quad (63)$$

こうして、拡散符号がスパースな場合の DS-CDMA モデルについてレプリカ対称性を仮定した場合の性能評価指標を得ることができたので、次章では数値計算を行いシミュレーション結果との比較を行う。

14 数値計算

ここでは、導出した性能評価指標を数値的に求め、シミュレーションとの比較を行う。まず、我々が行った数値計算の手法を説明する [21]。

鞍点方程式

$$\begin{aligned}\tilde{P}(\tilde{h}) &= \int Dz \sum_{L=1}^{\infty} \frac{(\frac{\rho}{\alpha})^{L-1} e^{-\frac{\rho}{\alpha}}}{(L-1)!} \int d\xi_L \bar{\pi}(\xi_L) \left(\prod_{l=1}^{L-1} dh_l P(h_l) d\xi_l \bar{\pi}(\xi_l) \right) \\ &\quad \times \delta \left(\tilde{h} - \frac{1}{2} \log \frac{\Omega(1)}{\Omega(-1)} \right),\end{aligned}\quad (64)$$

$$\Omega(\tau) = \sqrt{2\pi\beta} \left(\prod_{l=1}^{L-1} (1 + \tanh h_l) \right) \frac{1}{2^L} \sum_{\boldsymbol{\tau}=\{-1,1\}^{L-1}} \exp \left(\sum_{l=1}^{L-1} (\tau_l - 1) h_l \right)$$

$$-\frac{\beta}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_0}} z + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left\{ \sum_{l=1}^{L-1} \xi_l (\tau_l - 1) + \xi_L (\tau - 1) \right\} \right)^2, \quad (65)$$

$$\frac{1}{2} \log \frac{\Omega(1)}{\Omega(-1)} \equiv F(z, \{\xi_l\}, \{h_l\}), \quad (66)$$

$$P(h) = \int \cdots \int \left(\prod_{c=1}^{\rho-1} d\tilde{h}_c \tilde{P}(\tilde{h}_c) \right) \delta \left(h - \sum_{c=1}^{\rho-1} \tilde{h}_c \right) \quad (67)$$

を満たす $J (\gg 1)$ 個の h, \tilde{h} を以下の手順 1 と手順 2 を繰り返すことにより数値的に得る。

まず、 h, \tilde{h} の値を入れるための 2 個の配列 $H(i), \tilde{H}(i), i = 1, \dots, J$ を用意し、乱数によって発生された値を初期値として入れる。

手順 1 J 個の配列要素 $\tilde{H}(i)$ の中からランダムに 1 つ選ぶ。それを $\tilde{H}(k)$ とする。 z, L を式 (64) 中の各々の分布 $p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, p(L) = \frac{(\frac{\rho}{\alpha})^{L-1} e^{-\frac{\rho}{\alpha}}}{(L-1)!}$ にしたがって発生させる。(64) 式の積分回数は L に依存するので、 L が大きくなると、数値計算の実行は困難になる。したがって、分布 $p(L)$ が十分小さくなる L の値を上限とし、それよりも大きな値が発生した場合は、上限の値をとるものとする。 ξ は、先に用意した L の値を用いて、分布 $p(\xi) = \pi(\xi)$ にしたがって L 個発生させる。これを $\xi_l, l = 1, \dots, L$ とする。また $H(i)$ の中からランダムに $L-1$ 個選び出し、各要素を $h_l, l = 1, \dots, L-1$ とおく。こうして選ばれた値から、 $F(z, \{\xi_l, l = 1, \dots, L\}, \{h_l, l = 1, \dots, L-1\})$ を求める。 $F(z, \{\xi_l, l = 1, \dots, k\}, \{h_l, l = 1, \dots, k\})$ 内で出現する τ については、確率 $\frac{1}{2}$ で 1 と -1 をとるとする。(64) 式を満たすのは、 $\tilde{H}(k) = F(z, \{\xi_l\}, \{h_l\})$ なので、 $\tilde{H}(k)$ と $F(z, \{\xi_l\}, \{h_l\})$ を比較して両者が一致すればそのままとし、一致しなければ $\tilde{H}(k)$ に $F(z, \{\xi_l\}, \{h_l\})$ の値を入れ更新する。この操作を J 回繰り返す。

手順 2 手順 1 の後、 J 個の $\tilde{H}(i)$ から (67) 式の関係を用いて $H(i)$ の更新を行う。まず、 J 個の $H(i)$ の中からランダムに 1 個選ぶ。それを $H(k')$ とする。 J 個の $\tilde{H}(i)$ の中からランダムに $\rho-1$ 個選ぶ。その各要素を $\tilde{h}_c, c = 1, \dots, \rho-1$ とおく。(67) 式より、選ばれた $H(k')$ と $\sum_{c=1}^{\rho-1} \tilde{h}_c$ を比較し一致すればそのまま、一致しなければ $H(k')$ に $\sum_{c=1}^{\rho-1} \tilde{h}_c$ の値を入れて更新する。この操作を J 回繰り返す。

手順 1 と 2 を繰り返すことで、 J 個のセットである h, \tilde{h} は分布 $P(h), \tilde{P}(\tilde{h})$ に従うものへと近づく。こうして、我々は数値的に $P(h), \tilde{P}(\tilde{h})$ に従う h, \tilde{h} を得ることができる。

以下では、拡散符号の値を与える確率密度関数として $\pi(\xi) = \frac{1}{2}\delta(\xi-1) + \frac{1}{2}\delta(\xi+1)$ を

用い数值計算を行う。この場合は、0以外の値を持つ ρ 個の拡散符号列の要素は、確率 $\frac{1}{2}$ で1か-1をとる。

14.1 シミュレーション方法

ビット誤り率について、理論結果とシミュレーション結果の比較を行う。理論結果の数値解は受信者が通信路の状態の知識を持っている場合、つまり $\beta = \beta_0$ ($\sigma = \sigma_0^2$) でのビット誤り率を上述の数値計算法を用いて求めた。一方、シミュレーションは、モンテカルロ法で事後分布 $p(s|y; \Xi)$ を評価して s を得、一様な事前分布に従って生成した η と比較することによってビット誤り率を求めた。

14.2 数値解とシミュレーション結果の比較

図 31 は、 $\beta = \beta_0$ ($\sigma = \sigma_0^2$), $\rho = 2$, $\alpha = 1$ での理論結果とシミュレーション結果のビット誤り率を示したものである。横軸の $\frac{E_b}{N_0}$ と通信路ノイズの分散 σ_0^2 とは $\frac{E_b}{N_0} = \frac{1}{2\sigma_0^2}$ の関係にある。図 31 より、理論結果とシミュレーション結果は非常によく一致していることが分かる。

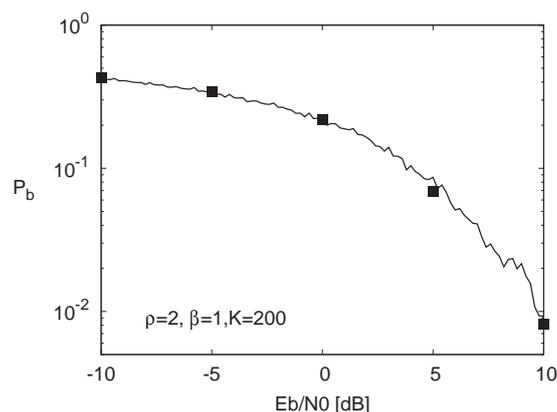


図 31 $\sigma_0^2 = \sigma^2$, $\rho = 2$, $\alpha = 1$ でのビット誤り率. 実線:レプリカ解析結果, 印:シミュレーション結果 ($N = 200$).

15 まとめ

我々は FH-CDMA のモデル化を行った。周波数ホップパターンである拡散符号は、(キャリア周波数の数 M) \times (ホップ回数 ρ) の 2 次元で表されるものであるが、これを 1 次元的に表すことで、DS-CDMA モデルにおけるスパースな拡散符号として表すことができた。このとき、1 次元の拡散符号の要素のうち、0 でない値をとるものは、全要素の中からランダムに ρ 個とし、0 でない値は任意の確率密度関数によって与えるとした。また、このようなスパースな拡散符号を持つ DS-CDMA モデルについて性能評価解析を行った。性能評価解析は、レプリカ法を用いた解析を行い、ビット誤り率と通信路容量を導出した。数値計算では、拡散符号が +1 と -1 のみをとる場合について、ビット誤り率を求め、アニーリング手法によるモンテカルロシミュレーションの結果との比較を行った。その結果、両者は良く一致することが示された。同様に、通信路容量についての比較も必要であるがこれは今後の課題である。

第 IV 部

まとめと議論

16 本論文のまとめ

我々は、統計力学の手法を用いた、CDMA マルチユーザー復調器の性能評価問題について調べた。直接拡散 CDMA (DS-CDMA) における復調の性能評価は、レプリカ法を用いた手法が確立されており、この手法を用いた場合にはレプリカ対称性を仮定した解が性能評価の指標となることが示されている。スピングラスモデルやニューラルネットワークにおけるホップフィールドモデルなどのレプリカ法を用いた解析では、レプリカ対称解 (RS 解) を求めた後、その解の安定性を調べ、レプリカ対称性が破れている場合には、レプリカ対称性破れの解 (RSB 解) が求められてきた。一方、DS-CDMA モデルでのレプリカ解析では、RS 解とその安定条件は調べられているが、レプリカ対称性の破れが起こる領域やそこでの RSB 解については調べられてこなかった。我々は、加法的ガウス通信路ノイズを仮定した DS-CDMA モデルの MPM 復調器の性能評価問題を取り上げ、レプリカ法を用いて解析から導かれる RS 解の振る舞いについて詳細に調べ、DS-CDMA モデルの物理的性質を明らかにすることを試みた。このモデルのハミルトニアンはスピングラスなどの統計力学で扱われてきたモデルのハミルトニアンと類似している。類似したハミルトニアンを持つモデルでは、低温領域でレプリカ対称性が破れることが分かっている。そこで、我々は、DS-CDMA モデルの低温領域に注目した。このモデルでは、通信路ノイズの分散が温度と対応している。ノイズの分散は一般に不明であるため、MPM 復調器では温度の推定値が用いられる。そのため、温度パラメータには、真のノイズの分散に対応する T_0 と推定の分散に対応する T の 2 つが存在する。また、復調器の性能は全ユーザー数 N と拡散符号のチップ数 p との比 $\alpha = \frac{p}{N}$ について調べる必要がある。一般には、 α が大きくなるほど性能は良くなる。我々は、性能評価の指標として、真の情報信号とその復調による推定値のオーバーラップ R を使い、真の温度 T_0 、推定温度 T 、ユーザー数とチップ数の比 α の 3 つのパラメータを様々に変化させ、RS 解の R の振る舞いを見た。

R の α 依存性を見ると、RS 解は高温では α 増加とともに単調に増加するが、低温になると S 字型になる。S 字の部分では、同一の α で 3 つの RS 解が存在する。我々は S 字解の分枝を下から順番に branch 1、branch 2、branch 3 と呼び、3 つの解が共存する領域を調べるために branch 1 と branch 2、branch 2 と branch 3 の境界を表すスピノーダルラインをパラメータ空間で描いた。その結果、解の共存は $T_0 \leq 0.1$ で出現し、branch

2 と branch 3 の境界の α の値は $T = T_0$ 付近で最小になることが分かった。また、 T_0 を低温で固定し、 T を下げていくと、 $T = T_0$ 付近以下で解の組み換えが起こり、解の構造が複雑になることを見出した。解の組み換えは、S 字解とは別の解が branch 1 と branch 2 の境界付近に出現し、それらが接触することによって生じた。

一方、RS 解の安定性については、エントロピーと AT 安定性の両方を調べた。エントロピーについては、RS 解のエントロピーが負の値をとることは物理的にありえないため、そのときレプリカ対称性が破れていると考えられる。この場合には、エントロピーが 0 で凍結した解が存在すると考えられるので、この状況をフリージングと呼ぶ。AT 安定性とエントロピーを調べた結果、解が共存する領域、共存しない領域のどちらにおいても低温でレプリカ対称性の破れが起こることが分かった。また、AT 不安定性とフリージングの出現のどちらが生じるかについては、 α 、 T 、 T_0 のパラメータに依存して異なっていた。我々は、AT 不安定性、フリージングの 2 つの場合における 1 ステップレプリカ対称性破れの解 (1RSB 解) を導出した。1RSB 解と RS 解を比較したところ、解が共存しない場合においては、両者の違いは非常に小さかった。このことは、レプリカ対称性破れが生じる領域であってもオーバーラップ R に関しては、RS 解は真のオーバーラップの値と大きく異なることを意味している。解が共存する領域では、RS 解の各 branch についての AT 安定性やエントロピーの条件に加えて、RS 解の熱力学的転移を考慮する必要があり、レプリカ対称性破れの状況は非常に複雑であったが、我々が調べた範囲では、多くの場合、branch 1 に対応する RS 解で case 2 が起こり、1RSB 解が出現していた。西森温度においては、RS 解が常に安定な解であるということが示されているが、我々の調べた結果からは、RS 解の branch 1 についてフリージング領域が出現することがわかった。しかし、熱力学的転移点とフリージング点の比較を行ったところ、 α を大きくしていくと、フリージングの領域に入る直前で、熱力学的転移が起こるため、系にとって熱力学的に安定な解は常に RS 解であることが示され、Nishimori の結果と矛盾しないことが明らかになった。

次に、理論結果とシミュレーション結果を比較した結果をまとめる。RS 解が共存しない場合は、レプリカ対称性の破れが起こらない領域では理論結果とシミュレーション結果は非常によく一致していた。1RSB 解が出現する領域では、RS 解と 1RSB 解の差が小さいため、シミュレーションの誤差の範囲に両方の解が含まれシミュレーションではどちらが実現しているのか判別できなかった。しかし、シミュレーションの平均値は 1RSB 解と良く一致していた。解が共存する場合についても、ほとんどの領域で理論結果とシミュレーション結果は非常によく一致していたが、熱力学的転移点が低温の場合は、アニーリングスケジュールが適切でないことが原因で、シミュレーションでは熱力学的転移が実現

されず、シミュレーション結果は準安定状態にトラップされることが分かった。

このように、DS-CDMA モデルは、低温領域で、RS 解が共存し、またレプリカ対称性破れが起こることが明らかになった。そのため、レプリカ法を用いた性能評価を行う際には、熱力学的に安定かつ AT 安定でエントロピーが非負の値を持つような解を探す必要があることが分かった。低温での性能評価については、以上のような結果を得ることができた。

もうひとつの我々が行った研究は、DS 方式とは異なるスペクトル拡散方式である周波数ホッピング CDMA (FH-CDMA) のモデル化である。我々は、FH-CDMA を、DS 方式で用いた手法が適用できるような簡単な数学的モデルとなるようにモデルを構築し、その性能評価を行った。モデルの構築に当たっては、FH 方式での拡散符号に相当する周波数ホップのパターンを DS 方式における拡散符号の符号系列がスパースなものとし、FH-CDMA のモデルをスパースな拡散符号を持つ DS-CDMA モデルとして表した。拡散符号を DS-CDMA モデルと同様の形で表したことにより、レプリカ法を用いた性能評価解析を行うことができた。各ユーザーの拡散符号の 0 でない値を持つ要素数を厳密に決め、拡散符号がスパースであることに留意して解析を行った結果、レプリカ対称性を仮定した場合のビット誤り率、通信路容量という性能評価指標を導出することができた。また、数値的に求めたビット誤り率をアニーリング法によるモンテカルロシミュレーションの結果と比較した結果、両者が良く一致することが示された。

17 議論と今後の課題

DS-CDMA モデルの低温での性能評価問題において、我々は解が共存する領域内での $T = T_0$ 付近で RS 解の組み換えが起こることを示した。ここでは、組み換えが起こる原因について考察しよう。 $T = T_0$ の西森温度では、 $R = q$ 、 $\hat{R} = \hat{q}$ を満たす解が存在する。解の分岐が起こる領域内に西森温度が含まれる場合には、西森温度での R の α 依存性を見ると、 $R = q$ 、 $\hat{R} = \hat{q}$ を満たす S 字型の解に $R \neq q$ 、 $\hat{R} \neq \hat{q}$ の閉曲線解が重なっている様子を観測することができる。 T_0 を固定したまま、 T を西森温度からわずかにずらすと、S 字型の解が $R \neq q$ 、 $\hat{R} \neq \hat{q}$ となり、西森温度で $R = q$ 、 $\hat{R} = \hat{q}$ であった解が分岐し、S 字型解と閉曲線解との間で組み換えが起こる。 $T > T_0$ では $R < q$ より、S 字型解の R は閉曲線解の下側と組み換えが起こり、 $T < T_0$ では $R > q$ より、S 字型解の R は閉曲線解の上側と組み換えが起こると考えられる。閉曲線解の下側と組み換えが起こる場合は、branch 2 がもともとの S 字型解の branch 2 よりも下側に下がるだけなので、branch 1 と branch 2 の境界は変化しない。一方、閉曲線解の上側と組み換えが起こる場

合は、branch 1 と branch 2 の境界付近が閉曲線解の形状に合わせて膨らむ。このため、西森温度以下ではスピノーダルラインが定義できなくなると考えられる。ただし、 T_0 に依存して、 $T > T_0$ であっても S 字型解の R が閉曲線解の上側と組み変わる場合があったので、この領域については今後より詳細に研究を行う必要がある。

解が共存する時、西森温度以上の温度 T でのフリージングによる 1RSB 解は、我々が調べた範囲では常に準安定であったが、西森温度よりも低温の T では、熱力学的に安定なフリージングによる 1RSB 解の存在が確認された。西森温度において、RS 解の branch 1 の自由エネルギーと branch 3 の自由エネルギーが一致する点を $\alpha = \alpha_{th}$ 、branch 1 のフリージング点を $\alpha = \alpha_s$ として、両者を数値的に比較すると、わずかに α_{th} の方が α_s よりも小さいことが示されたが、数値誤差を考慮すると $\alpha_{th} = \alpha_s$ である可能性が考えられる。したがって、 α_{th} と α_s の大小関係を調べ、 $\alpha_{th} = \alpha_s$ となる温度 $T = T^*$ を確定する必要がある。

我々は、アニーリングスケジュールをいろいろ変えて、モンテカルロシミュレーションを行ったが、熱力学的転移温度が、 $T = 0.05$ のように低温の場合には、シミュレーション結果は準安定状態にトラップされていた。シミュレーションで熱力学的転移を観測するための、適切なアニーリングスケジュールの探索は現在調査中である。

さらに、1RSB 解の AT 安定性の議論や 1RSB 解のビット誤り率の定義と評価なども今後の課題として残されている。

一方、スパースな拡散符号を持つ DS-CDMA モデルについては、拡散符号の 0 でない要素の数を様々に変えた場合の性能の比較を行う必要がある。第 3 部では、拡散符号の 0 でない要素の数を厳密に ρ 個とした場合における結果を示したが、我々は、各ユーザーの拡散符号の 0 でない要素の数が平均して ρ 個になる場合についても解析を行っている。この場合は、送信信号が連続値をとり、事前分布がガウス分布に従う場合に近似計算 [22, 23] を用いて性能評価指標を導出している [24]。この場合は、送信情報がビットではないので、ビット誤り率は定義できないが、送信情報とその推定値のオーバーラップを比較することができる。その結果、 ρ が小さいと、復調の性能が低く、 ρ が大きくなるにつれて拡散符号が密な場合の性能に近づくことが示された。このことから、第 3 部で解析したモデルにおいても、 ρ を大きくするにつれて、性能が上がることが予測される。

また、性能評価指標の 1 つである通信路容量を数値的に求めることも今後の課題として残されている。

スパースに拡散された DS-CDMA モデルは、FH 方式だけでなく時間ホッピング方式などについての簡単な数学的モデルになっていることから、このモデルを詳細に調べることは意味がある。したがって、今後さらに研究を発展させる予定である。

謝辞

本研究を含めて、長年ご指導を頂きました、奈良女子大学大学院人間文化研究科の上江洵達也教授に心から御礼申し上げます。

また、本研究を進めるにあたって、多大なご指導を頂きました京都大学大学院情報学研究科の田中利幸教授に心より感謝いたします。特に第3部のスパーズな拡散符号を考慮した直接拡散 CDMA モデルの解析は田中先生のご指導がなければはじまりませんでした。

東京大学大学院新領域創成科学研究科の岡田真人教授には、CDMA モデルの研究をはじめのきっかけと様々なご助言を賜りました。奈良女子大学理学部物理科学科の戸田幹人助教授と奈良女子大学大学院人間文化研究科の狐崎創助手には、多くのご助言と議論を賜りました。厚く御礼申し上げます。

本論文は、奈良女子大学理学部物理科学科複雑系の物理学研究室の皆様とそして私を励まして下さった全ての皆様の支えによって完成させることができました。ここに深く感謝いたします。

付録 A DS-CDMA モデルのレプリカ計算

ユーザーの情報信号を $\boldsymbol{\eta} \equiv (\eta_1, \dots, \eta_N)^T$ 、拡散符号を $(\Xi)_{\mu i} \equiv \xi_i^\mu$, $\mu = 1, \dots, p$; $i = 1, \dots, N$ 、加法的ノイズを $\mathbf{n} \equiv (n^1, \dots, n^p)^T$ とすると、受信信号系列 $\mathbf{y} \equiv (y^1, \dots, y^p)^T$ は次のように表される。

$$\mathbf{y} = \frac{1}{\sqrt{N}} \Xi \boldsymbol{\eta} + \mathbf{n}. \quad (68)$$

受信信号系列と拡散符号を既知とし、情報信号の復調を行う。推定情報信号は $\mathbf{s} \equiv (s_1, \dots, s_N)^T$ とする。情報信号の事前分布は、1 と -1 が等確率で出現する一様分布 $p(\boldsymbol{\eta}) = p(\mathbf{s}) = \frac{1}{2^N}$ を仮定する。また、拡散符号系列は 1 と -1 が等確率で出現するとし、その分布を一様分布 $p(\Xi) = \frac{1}{2^{Np}}$ とする。ノイズは平均 0、分散 $\frac{1}{\beta_0}$ のガウスノイズを考える。このとき、ノイズの分布は

$$p(\mathbf{n}) = \left(\sqrt{\frac{\beta_0}{2\pi}} \right)^p \exp\left(-\frac{\beta_0}{2} \|\mathbf{n}\|^2\right) = \left(\sqrt{\frac{\beta_0}{2\pi}} \right)^p \exp\left(-\frac{\beta_0}{2} \left\| \mathbf{y} - \frac{1}{\sqrt{N}} \Xi \boldsymbol{\eta} \right\|^2\right) \quad (69)$$

より、 $\boldsymbol{\eta}$ の条件のもとでの \mathbf{y} の分布は $p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\eta}; \Xi) = \left(\sqrt{\frac{\beta_0}{2\pi}} \right)^p \exp\left(-\frac{\beta_0}{2} \left\| \mathbf{y} - \frac{1}{\sqrt{N}} \Xi \boldsymbol{\eta} \right\|^2\right)$ と表される。今、求めたいのは事後分布 $p(\mathbf{s}|\mathbf{y}; \Xi)$ である。これは、ベイズの公式

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{\sum_A P(B|A)P(A)} \quad (70)$$

より、次式のように表される。

$$p(\mathbf{s}|\mathbf{y}; \Xi) = \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{s}; \Xi)p(\mathbf{s})}{\sum_{\mathbf{s}} p(\mathbf{y}|\mathbf{s}; \Xi)p(\mathbf{s})} = \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{s}; \Xi) \frac{1}{2^N}}{\sum_{\mathbf{s}} p(\mathbf{y}|\mathbf{s}; \Xi) \frac{1}{2^N}} = \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{s}; \Xi)}{\sum_{\mathbf{s}} p(\mathbf{y}|\mathbf{s}; \Xi)} \quad (71)$$

ここで、 $J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \xi_j^\mu$, $h_i^0 = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu y^\mu$ とおくと、

$$p(\mathbf{s}|\mathbf{y}; \Xi) = \frac{\exp\left(-\beta \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} s_i s_j - \sum_i h_i^0 s_i \right)\right)}{\sum_{\mathbf{s}} \exp\left(-\beta \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} s_i s_j - \sum_i h_i^0 s_i \right)\right)} \quad (72)$$

と書ける。新たに、 $Z(\beta) = \sum_{\mathbf{s}} \exp(-\beta \mathcal{H}(\mathbf{s}))$, $\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} s_i s_j - \sum_i h_i^0 s_i$ とおくと、事後分布は

$$p(\mathbf{s}|\mathbf{y}; \Xi) = \frac{\exp(-\beta \mathcal{H}(\mathbf{s}))}{Z(\beta)} \quad (73)$$

と表される。

A.1 性能評価

系の自由エネルギーに対応する $\log Z(\beta)$ を計算し、そこから性能評価指標となるマクロ変数の導出を行う [5, 14]。 $\log Z(\beta)$ は $\{J_{ij}\}$ と $\{h_i^0\}$ の関数であり、 $J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \xi_j^\mu$, $h_i^0 = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu y^\mu$, $\mathbf{y} = \frac{1}{\sqrt{N}} \Xi \boldsymbol{\eta} + \mathbf{n}$ より、 $\boldsymbol{\eta}$, Ξ と \mathbf{y} の関数と言い換えることもできる。大システム極限で自己平均性が成り立っていると仮定して、以下では 1 ユーザーあたりの自由エネルギーを η , Ξ と \mathbf{y} について平均したものを計算する。これらの平均操作は $[\cdot]$ で表す。

$$[\log Z(\beta)] = \mathbb{E}_{\Xi} \left(\int d\boldsymbol{\eta} \int d\mathbf{y} p(\boldsymbol{\eta}) p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\eta}; \Xi) \log Z(\beta) \right) \quad (74)$$

ここで、 \mathbb{E}_Ξ は拡散符号 Ξ についての平均を表す。

$[\log Z(\beta)]$ を計算するのは困難である。恒等式 $[\log Z(\beta)] = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{[Z(\beta)^n] - 1}{n}$ より、 $[Z(\beta)^n]$ を計算する。

$$\begin{aligned} [Z(\beta)^n] &= \mathbb{E}_\Xi \left(\int d\mathbf{y} \int d\boldsymbol{\eta} p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\eta}; \Xi) Z(\beta)^n \right) \\ &= \int d\Xi p(\Xi) \int d\mathbf{y} \int d\boldsymbol{\eta} p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\eta}; \Xi) Z(\beta)^n \\ &= \frac{1}{2^N} \frac{1}{2^{Np}} \sum_{\boldsymbol{\eta}} \sum_{\Xi} \int \left(\prod_{\mu=1}^p dy^\mu p(y^\mu|\boldsymbol{\eta}; \Xi) \sum_{\mathbf{s}_a} \exp \left(-\beta \sum_a \mathcal{H}(\mathbf{s}_a) \right) \right). \end{aligned} \quad (75)$$

ここで、

$$u_0^\mu = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \eta_i, \quad u_a^\mu = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu s_{ia} \quad (76)$$

とおくと、

$$p(y^\mu|\boldsymbol{\eta}; \Xi) = \sqrt{\frac{\beta_0}{2\pi}} \exp \left(-\frac{\beta_0}{2} \left(y^\mu - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i \xi_i^\mu \eta_i \right)^2 \right) = \sqrt{\frac{\beta_0}{2\pi}} \exp \left(-\frac{\beta_0}{2} (y^\mu - u_0^\mu)^2 \right), \quad (77)$$

$$\exp \left(-\beta \sum_a \mathcal{H}(\mathbf{s}_a) \right) = \exp \left(-\frac{\beta}{2} \sum_a \sum_\mu ((u_a^\mu)^2 - 2y^\mu u_a^\mu) \right) \quad (78)$$

より、 $[Z(\beta)^n]$ は

$$\begin{aligned} [Z(\beta)^n] &= \frac{1}{2^N} \frac{1}{2^{Np}} \sum_{\boldsymbol{\eta}} \sum_{\Xi} \sum_{\mathbf{s}_a} \int \left\{ \prod_{\mu=1}^p du_0^\mu \delta \left(u_0^\mu - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \eta_i \right) \right\} \\ &\quad \times \left\{ \prod_{\mu,a} du_a^\mu \delta \left(u_a^\mu - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu s_{ia} \right) \right\} \left\{ \prod_{\mu=1}^p dy^\mu \sqrt{\frac{\beta_0}{2\pi}} \exp \left(-\frac{\beta_0}{2} (y^\mu - u_0^\mu)^2 \right) \right\} \\ &\quad \times \exp \left(-\beta \sum_a \sum_\mu \left(\frac{(u_a^\mu)^2}{2} - y^\mu u_a^\mu \right) \right) \end{aligned} \quad (79)$$

となる。さらに次の関係式

$$\begin{aligned} \delta \left(u_0^\mu - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \eta_i \right) &= \int \frac{d\hat{u}_0^\mu}{2\pi} \exp \left\{ i\hat{u}_0^\mu \left(u_0^\mu - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \eta_i \right) \right\}, \\ \delta \left(u_a^\mu - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu s_{ia} \right) &= \int \frac{d\hat{u}_a^\mu}{2\pi} \exp \left\{ i\hat{u}_a^\mu \left(u_a^\mu - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu s_{ia} \right) \right\} \end{aligned}$$

を用いると、(79) 式は、

$$\begin{aligned} [Z(\beta)^n] &= \frac{1}{2^N} \frac{1}{2^{Np}} \sum_{\boldsymbol{\eta}} \sum_{\Xi} \sum_{\mathbf{s}_a} \int \left\{ \prod_{\mu=1}^p \frac{du_0^\mu d\hat{u}_0^\mu}{2\pi} \exp \left\{ i\hat{u}_0^\mu \left(u_0^\mu - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \eta_i \right) \right\} \right\} \\ &\quad \times \left\{ \prod_{\mu,a} \frac{du_a^\mu d\hat{u}_a^\mu}{2\pi} \exp \left\{ i\hat{u}_a^\mu \left(u_a^\mu - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu s_{ia} \right) \right\} \right\} \\ &\quad \times \left\{ \prod_{\mu=1}^p dy^\mu \sqrt{\frac{\beta_0}{2\pi}} \exp \left(-\frac{\beta_0}{2} (y^\mu - u_0^\mu)^2 \right) \right\} \exp \left(-\beta \sum_a \sum_\mu \left(\frac{(u_a^\mu)^2}{2} - y^\mu u_a^\mu \right) \right) \end{aligned} \quad (80)$$

となる。

次に三についての平均をとる。(80)式で、 ξ_i^μ を含む項は

$$\begin{aligned} & \prod_{\mu,a} \exp \left\{ -i\hat{u}_0^\mu \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \eta_i \right\} \exp \left\{ -i\hat{u}_a^\mu \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu s_{ia} \right\} \\ &= \prod_{i,\mu} \exp \left\{ -\frac{i}{\sqrt{N}} \left(\sum_{a=1}^n \hat{u}_a^\mu s_{ia} + \hat{u}_0^\mu \eta_i \right) \xi_i^\mu \right\} = \prod_{i,\mu} A(\xi_i^\mu) \end{aligned}$$

より、まず $\prod_{i,\mu} A(\xi_i^\mu)$ の平均をとる。

$$\begin{aligned} \prod_{i,\mu} \mathbb{E}_\Xi [A(\xi_i^\mu)] &= \prod_{i,\mu} \left(\sum_{\xi_i^\mu} p(\xi_i^\mu) A(\xi_i^\mu) \right) = \prod_{i,\mu} \left(\frac{1}{2} \sum_{\xi_i^\mu} \exp \left\{ -\frac{i}{\sqrt{N}} \left(\sum_{a=1}^n \hat{u}_a^\mu s_{ia} + \hat{u}_0^\mu \eta_i \right) \xi_i^\mu \right\} \right) \\ &= \prod_{i,\mu} \left\{ \frac{1}{2} \left(\exp \left\{ -\frac{i}{\sqrt{N}} \left(\sum_{a=1}^n \hat{u}_a^\mu s_{ia} + \hat{u}_0^\mu \eta_i \right) \right\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \exp \left\{ \frac{i}{\sqrt{N}} \left(\sum_{a=1}^n \hat{u}_a^\mu s_{ia} + \hat{u}_0^\mu \eta_i \right) \right\} \right) \right\} \\ &= \prod_{i,\mu} \cos \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sum_{a=1}^n \hat{u}_a^\mu s_{ia} + \hat{u}_0^\mu \eta_i \right) \right\}. \end{aligned}$$

テーラー展開を行い、2次までとると、

$$\begin{aligned} \prod_{i,\mu} \mathbb{E}_\Xi [A(\xi_i^\mu)] &= \prod_{i,\mu} \cos \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sum_{a=1}^n \hat{u}_a^\mu s_{ia} + \hat{u}_0^\mu \eta_i \right) \right\} \\ &\sim \prod_{i,\mu} \left(1 - \frac{1}{2N} \left(\sum_{a=1}^n \hat{u}_a^\mu s_{ia} + \hat{u}_0^\mu \eta_i \right)^2 \right) \\ &\sim \prod_{i,\mu} \exp \left\{ -\frac{1}{2N} \left(\sum_{a=1}^n \hat{u}_a^\mu s_{ia} + \hat{u}_0^\mu \eta_i \right)^2 \right\} \\ &= \prod_{i,\mu} \exp \left\{ -\frac{1}{2N} \left(\sum_{a,b} \hat{u}_a^\mu \hat{u}_b^\mu s_{ia} s_{ib} + 2 \sum_a \hat{u}_a^\mu s_{ia} \hat{u}_0^\mu \eta_i + (\hat{u}_0^\mu)^2 \right) \right\} \\ &= \prod_{i,\mu} \exp \left\{ -\frac{1}{2N} \sum_{a=b=1}^n (\hat{u}_a^\mu)^2 (s_{ia})^2 - \frac{1}{N} \sum_{a<b} \hat{u}_a^\mu \hat{u}_b^\mu s_{ia} s_{ib} - \frac{1}{N} \hat{u}_0^\mu \sum_a \hat{u}_a^\mu s_{ia} \eta_i - \frac{1}{2N} (\hat{u}_0^\mu)^2 \right\} \\ &= \prod_{i,\mu} \exp \left\{ -\frac{1}{2N} \sum_{a=1}^n (\hat{u}_a^\mu)^2 - \sum_{a<b} \frac{s_{ia} s_{ib}}{N} \hat{u}_a^\mu \hat{u}_b^\mu - \sum_a \frac{s_{ia} \eta_i}{N} \hat{u}_0^\mu \hat{u}_a^\mu - \frac{1}{2N} (\hat{u}_0^\mu)^2 \right\} \\ &= \prod_{\mu} \exp \left\{ -\frac{\sum_{a=1}^n (\hat{u}_a^\mu)^2}{2} - \sum_{a<b} q_{ab} \hat{u}_a^\mu \hat{u}_b^\mu - \sum_a R_a \hat{u}_0^\mu \hat{u}_a^\mu - \frac{1}{2} (\hat{u}_0^\mu)^2 \right\} \\ &= \prod_{\mu} \int \left\{ \prod_{a<b} dq_{ab} \delta \left(q_{ab} - \sum_{i=1}^N \frac{s_{ia} s_{ib}}{N} \right) \right\} \left\{ \prod_a dR_a \delta \left(R_a - \sum_{i=1}^N \frac{s_{ia} \eta_i}{N} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \exp \left\{ -\frac{\sum_{a=1}^n (\hat{u}_a^\mu)^2}{2} - \sum_{a<b} q_{ab} \hat{u}_a^\mu \hat{u}_b^\mu - \sum_a R_a \hat{u}_0^\mu \hat{u}_a^\mu - \frac{1}{2} (\hat{u}_0^\mu)^2 \right\} \\
= & \prod_\mu \int \left\{ \prod_{a<b} \frac{iN dq_{ab} d\hat{q}_{ab}}{2\pi} \exp \left(-N \sum_{a<b} \hat{q}_{ab} \left(q_{ab} - \sum_{i=1}^N \frac{s_{ia} s_{ib}}{N} \right) \right) \right\} \\
& \times \left\{ \prod_a \frac{iN dR_a d\hat{R}_a}{2\pi} \exp \left(-N \sum_a \hat{R}_a \left(R_a - \sum_{i=1}^N \frac{s_{ia} \eta_i}{N} \right) \right) \right\} \\
& \times \exp \left\{ -\frac{\sum_{a=1}^n (\hat{u}_a^\mu)^2}{2} - \sum_{a<b} q_{ab} \hat{u}_a^\mu \hat{u}_b^\mu - \sum_a R_a \hat{u}_0^\mu \hat{u}_a^\mu - \frac{1}{2} (\hat{u}_0^\mu)^2 \right\}
\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\sum_{i=1}^N \frac{s_{ia} s_{ib}}{N} = q_{ab}, \quad \sum_{i=1}^N \frac{s_{ia} \eta_i}{N} = R_a \quad (81)$$

とおいた。

以上より、(80) 式は、

$$\begin{aligned}
[Z(\beta)^n] &= \frac{1}{2^N} \sum_{\boldsymbol{\eta}} \sum_{\mathbf{s}_a} \int \left\{ \prod_{\mu=1}^p \frac{du_0^\mu d\hat{u}_0^\mu}{2\pi} \exp \{ i\hat{u}_0^\mu u_0^\mu \} \right\} \left\{ \prod_{\mu,a} \frac{du_a^\mu d\hat{u}_a^\mu}{2\pi} \exp \{ i\hat{u}_a^\mu u_a^\mu \} \right\} \\
& \times \int \prod_\mu \int \left\{ \prod_{a<b} \frac{iN dq_{ab} d\hat{q}_{ab}}{2\pi} \exp \left(-N \sum_{a<b} \hat{q}_{ab} \left(q_{ab} - \sum_{i=1}^N \frac{s_{ia} s_{ib}}{N} \right) \right) \right\} \\
& \times \left\{ \prod_a \frac{iN dR_a d\hat{R}_a}{2\pi} \exp \left(-N \sum_a \hat{R}_a \left(R_a - \sum_{i=1}^N \frac{s_{ia} \eta_i}{N} \right) \right) \right\} \\
& \times \exp \left\{ -\frac{\sum_{a=1}^n (\hat{u}_a^\mu)^2}{2} - \sum_{a<b} q_{ab} \hat{u}_a^\mu \hat{u}_b^\mu - \sum_a R_a \hat{u}_0^\mu \hat{u}_a^\mu - \frac{1}{2} (\hat{u}_0^\mu)^2 \right\} \\
& \times \left\{ \prod_{\mu=1}^p dy^\mu \sqrt{\frac{\beta_0}{2\pi}} \exp \left(-\frac{\beta_0}{2} (y^\mu - u_0^\mu)^2 \right) \right\} \exp \left(-\beta \sum_a \sum_\mu \left(\frac{(u_a^\mu)^2}{2} - y^\mu u_a^\mu \right) \right) \\
= & \int \left\{ \prod_{a<b} \frac{iN dq_{ab} d\hat{q}_{ab}}{2\pi} \right\} \left\{ \prod_a \frac{iN dR_a d\hat{R}_a}{2\pi} \right\} \prod_{\mu=1}^p \left(\int \frac{du_0^\mu d\hat{u}_0^\mu}{2\pi} \left\{ \prod_a \frac{du_a^\mu d\hat{u}_a^\mu}{2\pi} \right\} \sqrt{\frac{\beta_0}{2\pi}} dy^\mu \right. \\
& \times \exp \left\{ i\hat{u}_0^\mu u_0^\mu + i \sum_a \hat{u}_a^\mu u_a^\mu - \frac{\sum_a (\hat{u}_a^\mu)^2}{2} - \sum_{a<b} q_{ab} \hat{u}_a^\mu \hat{u}_b^\mu - \sum_a R_a \hat{u}_0^\mu \hat{u}_a^\mu - \frac{1}{2} (\hat{u}_0^\mu)^2 \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{\beta_0}{2} (y^\mu - u_0^\mu)^2 - \beta \sum_a \frac{(u_a^\mu)^2}{2} - \beta \sum_a y^\mu u_a^\mu \right\} \right) \\
& \times \frac{1}{2^N} \sum_{\boldsymbol{\eta}} \sum_{\mathbf{s}_a} \exp \left(N \sum_{a<b} \hat{q}_{ab} \sum_{i=1}^N \frac{s_{ia} s_{ib}}{N} + N \sum_a \hat{R}_a \sum_{i=1}^N \frac{s_{ia} \eta_i}{N} \right) \\
& \times \exp \left(-N \sum_{a<b} \hat{q}_{ab} q_{ab} - N \sum_a \hat{R}_a R_a \right)
\end{aligned}$$

$$= \int \left\{ \prod_{a<b} \frac{iNdq_{ab}d\hat{q}_{ab}}{2\pi} \right\} \left\{ \prod_a \frac{iNdR_a d\hat{R}_a}{2\pi} \right\} e^{N(G_1+G_2+G_3)} \quad (82)$$

となる。ここで、 e^{NG_1} , e^{NG_2} , e^{NG_3} は、

$$\begin{aligned} e^{NG_1} \equiv & \prod_{\mu=1}^p \left(\int \frac{du_0^\mu d\hat{u}_0^\mu}{2\pi} \left\{ \prod_a \frac{du_a^\mu d\hat{u}_a^\mu}{2\pi} \right\} dy^\mu \sqrt{\frac{\beta_0}{2\pi}} \exp \left\{ i\hat{u}_0^\mu u_0^\mu + i \sum_a \hat{u}_a^\mu u_a^\mu - \frac{\sum_a (\hat{u}_a^\mu)^2}{2} \right. \right. \\ & - \sum_{a<b} q_{ab} \hat{u}_a^\mu \hat{u}_b^\mu - \sum_a R_a \hat{u}_0^\mu \hat{u}_a^\mu - \frac{1}{2} (\hat{u}_0^\mu)^2 - \frac{\beta_0}{2} (y^\mu - u_0^\mu)^2 \\ & \left. \left. - \beta \sum_a \frac{(u_a^\mu)^2}{2} - \beta \sum_a y^\mu u_a^\mu \right\} \right), \end{aligned} \quad (83)$$

$$\begin{aligned} e^{NG_2} \equiv & \frac{1}{2^N} \sum_{\boldsymbol{\eta}} \sum_{\mathbf{s}_a} \exp \left(\sum_{a<b} \hat{q}_{ab} \sum_{i=1}^N s_{ia} s_{ib} + \sum_a \hat{R}_a \sum_{i=1}^N s_{ia} \eta_i \right) \\ = & \frac{1}{2^N} \sum_{\boldsymbol{\eta}} \sum_{\mathbf{s}_a} \left\{ \prod_i \exp \left(\sum_{a<b} \hat{q}_{ab} s_{ia} s_{ib} + \sum_a \hat{R}_a s_{ia} \eta_i \right) \right\}, \end{aligned} \quad (84)$$

$$e^{NG_3} \equiv \exp \left(-N \sum_{a<b} \hat{q}_{ab} q_{ab} - N \sum_a \hat{R}_a R_a \right) \quad (85)$$

である。

$\alpha = \frac{p}{N}$ とすると $e^{NG_1} = e^{\frac{pG_1}{\alpha}}$ である。 $e^{\frac{G_1}{\alpha}}$ は、

$$\begin{aligned} e^{\frac{G_1}{\alpha}} = & \left(\int \frac{du_0 d\hat{u}_0}{2\pi} \left\{ \prod_a \frac{du_a d\hat{u}_a}{2\pi} \right\} dy \sqrt{\frac{\beta_0}{2\pi}} \exp \left\{ i\hat{u}_0 u_0 + i \sum_a \hat{u}_a u_a \right. \right. \\ & - \frac{\sum_a (\hat{u}_a)^2}{2} - \sum_{a<b} q_{ab} \hat{u}_a \hat{u}_b - \sum_a R_a \hat{u}_0 \hat{u}_a - \frac{1}{2} (\hat{u}_0)^2 - \frac{\beta_0}{2} (y - u_0)^2 \\ & \left. \left. - \beta \sum_a \frac{(u_a)^2}{2} - \beta \sum_a y u_a \right\} \right) \end{aligned} \quad (86)$$

である。(86) 式を、 u_0, \hat{u}_0, y について積分し、さらに次の関係式

$$e^{\frac{Ax^2}{2}} = \int Dte^{\sqrt{A}xt}$$

を使って u_a について積分すると、

$$\begin{aligned} e^{\frac{G_1}{\alpha}} = & \int Dt \int \left\{ \prod_a \frac{d\hat{u}_a}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{\beta}} \exp \left(-\frac{1}{2} \hat{u}_a^2 + \frac{\beta}{2} \frac{1+\beta_0}{\beta_0} t^2 - \frac{\hat{u}_a^2}{2\beta} + i \sqrt{\frac{1+\beta_0}{\beta_0}} t \hat{u}_a \right) \right\} \\ & \times \exp \left(- \sum_{a<b} q_{ab} \hat{u}_a \hat{u}_b - \frac{\beta}{2} n \left(\sum_a R_a \hat{u}_a \right)^2 \right. \\ & \left. - in\beta \sqrt{\frac{1+\beta_0}{\beta_0}} t \sum_a R_a \hat{u}_a + \sum_{a,b} R_b \hat{u}_a \hat{u}_b \right) \end{aligned} \quad (87)$$

となる。

(82) 式の積分では、指数関数の肩が N に比例しているので N が大きい極限では、鞍点法により積分を評価できる。 $G_1(= \alpha(\frac{G_1}{\alpha}))$, G_2, G_3 の $q_{ab}, \hat{q}_{ab}, R_a, \hat{R}_a$ に $(\alpha\frac{G_1}{\alpha} + G_2 + G_3)$ を極値にする値を代入すると、 $N \rightarrow \infty$ で

$$[Z(\beta)^n] \sim e^{N(\alpha\frac{G_1}{\alpha} + G_2 + G_3)} = e^{Nn(\alpha\frac{G_1}{n\alpha} + \frac{G_2}{n} + \frac{G_3}{n})}$$

となる。ここで、 N を大きく保ったまま n を 0 に近づけると、

$$[Z(\beta)^n] \sim 1 + Nn \left(\alpha\frac{G_1}{n\alpha} + \frac{G_2}{n} + \frac{G_3}{n} \right) \quad (88)$$

となる。

このとき、1ユーザー当たりの自由エネルギーの平均値は次式で表される。

$$\begin{aligned} -\beta f &= \lim_{n \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{[Z(\beta)^n] - 1}{nN} \\ &= \lim_{n \rightarrow 0} \left(\alpha\frac{G_1}{n\alpha} + \frac{G_2}{n} + \frac{G_3}{n} \right). \end{aligned} \quad (89)$$

A.2 レプリカ対称解

$[Z(\beta)^n]$ を具体的に得るため、レプリカ対称性 (RS) : $R_a = R$, $q_{ab} = q$, $\hat{R}_a = \hat{R}$, $\hat{q}_{ab} = \hat{q}$ を仮定する。

まず、 $e^{\frac{G_1^{\text{RS}}}{\alpha}}$ を計算する。RS 解を仮定すると、 $\sum_{a < b} \hat{u}_a \hat{u}_b = \frac{1}{2} (\sum_a \hat{u}_a)^2 - \frac{1}{2} \sum_a \hat{u}_a$ より (87) 式は

$$\begin{aligned} e^{\frac{G_1^{\text{RS}}}{\alpha}} &= \int Dt \int \left\{ \prod_a \frac{d\hat{u}_a}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{\beta}} \exp \left(-\frac{1}{2} \hat{u}_a^2 + \frac{\beta}{2} \frac{1 + \beta_0}{\beta_0} t^2 - \frac{\hat{u}_a^2}{2\beta} + i \sqrt{\frac{1 + \beta_0}{\beta_0}} t \hat{u}_a \right) \right\} \\ &\quad \times \exp \left(-\frac{q}{2} \left(\sum_a \hat{u}_a \right)^2 + \frac{q}{2} \sum_a \hat{u}_a^2 - \frac{n\beta R^2}{2} \left(\sum_a \hat{u}_a \right)^2 - in\beta \sqrt{\frac{1 + \beta_0}{\beta_0}} R t \sum_a \hat{u}_a + R \left(\sum_a \hat{u}_a \right)^2 \right) \\ &= \int Dt Dz \left(\frac{1}{1 + \beta(1 + q)} \right)^{\frac{n}{2}} \exp \left(\frac{n}{2} \frac{\beta}{\beta_0} (1 + \beta_0) t^2 - \frac{n}{2} \frac{1}{1 + \beta^{-1} - q} \left(\sqrt{\frac{1 + \beta_0}{\beta_0}} t \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \beta \sqrt{\frac{1 + \beta_0}{\beta_0}} n t R + \sqrt{q - 2R + n\beta R^2 z} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (90)$$

となる。

$n \rightarrow 0$ では $e^{nX} \sim 1 + nX$ より、

$$\begin{aligned} e^{\frac{G_1^{\text{RS}}}{\alpha}} &\sim \left(\frac{1}{1 + \beta(1 + q)} \right)^{\frac{n}{2}} \int Dt Dz \left(1 + \frac{n}{2} \frac{\beta}{\beta_0} (1 + \beta_0) t^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{n}{2} \frac{1}{1 + \beta^{-1} - q} \left(\sqrt{\frac{1 + \beta_0}{\beta_0}} t + \sqrt{q - 2Rz} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

さらに、 $\int Dz (az^2 + bz) = a \int Dzz^2 + b \int Dzz = a$ より

$$\begin{aligned} e^{\frac{G_1^{\text{RS}}}{\alpha}} &= \left(\frac{1}{1 + \beta(1 + q)} \right)^{\frac{n}{2}} \left(1 + \frac{n}{2} \frac{\beta}{\beta_0} (1 + \beta_0) - \frac{n}{2} \frac{1}{1 + \beta^{-1} - q} \left(\frac{1 + \beta_0}{\beta_0} + q - 2R \right) \right) \\ &\sim \exp \left(-\frac{n}{2} \log(1 + \beta(1 + q)) + \frac{n}{2} \left(\frac{\beta}{\beta_0} (1 + \beta_0) - \frac{1}{1 + \beta^{-1} - q} \left(\frac{1 + \beta_0}{\beta_0} + q - 2R \right) \right) \right) \end{aligned}$$

$$= \exp \left(-\frac{n}{2} \left\{ \log(1 + \beta(1 - q)) - \frac{\beta}{\beta_0}(1 + \beta_0) + \frac{1}{1 + \beta^{-1} - q} \left(\frac{1 + \beta_0}{\beta_0} + q - 2R \right) \right\} \right). \quad (91)$$

ゆえに

$$\frac{G_1^{\text{RS}}}{\alpha} = -\frac{n}{2} \left\{ \log(1 + \beta(1 - q)) - \frac{\beta}{\beta_0}(1 + \beta_0) + \frac{1}{1 + \beta^{-1} - q} \left(\frac{1 + \beta_0}{\beta_0} + q - 2R \right) \right\} \quad (92)$$

となる。

次に、 $e^{NG_2^{\text{RS}}}$ を計算する。(84) 式より $e^{NG_2^{\text{RS}}}$ は

$$\begin{aligned} e^{NG_2^{\text{RS}}} &= \frac{1}{2^N} \sum_{\boldsymbol{\eta}} \sum_{\mathbf{s}_a} \left\{ \prod_i \exp \left(\frac{\hat{q}}{2} \left(\sum_a s_{ia} \right)^2 - \frac{\hat{q}}{2} \sum_a s_{ia}^2 + \hat{R} \sum_a s_{ia} \eta_i \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2^N} \sum_{\boldsymbol{\eta}} \sum_{\mathbf{s}_a} \left\{ \prod_i \int Dz \exp \left(\sqrt{\hat{q}}z \sum_a s_{ia} - \frac{\hat{q}}{2}n + \hat{R}\eta_i \sum_a s_{ia} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2^N} \sum_{\boldsymbol{\eta}} \left\{ \prod_i \int Dz \sum_{\mathbf{s}_a} \exp \left\{ \left(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R}\eta_i \right) \sum_a s_{ia} \right\} \exp \left(-\frac{\hat{q}}{2}n \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2^N} \sum_{\boldsymbol{\eta}} \left\{ \prod_i \int Dz \left\{ 2 \cosh \left(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R}\eta_i \right) \right\}^n \exp \left(-\frac{\hat{q}}{2}n \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2^N} \left\{ \prod_i \sum_{\eta_i} \int Dz \left\{ 2 \cosh \left(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R}\eta_i \right) \right\}^n \exp \left(-\frac{\hat{q}}{2}n \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2^N} \left\{ \prod_i \int Dz \left(\left\{ 2 \cosh \left(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R} \right) \right\}^n + \left\{ 2 \cosh \left(\sqrt{\hat{q}}z - \hat{R} \right) \right\}^n \right) \exp \left(-\frac{\hat{q}}{2}n \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2^N} \left\{ \prod_i 2 \int Dz \left\{ 2 \cosh \left(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R} \right) \right\}^n \exp \left(-\frac{\hat{q}}{2}n \right) \right\} \\ &= \left\{ \int Dz \left\{ 2 \cosh \left(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R} \right) \right\}^n \exp \left(-\frac{\hat{q}}{2}n \right) \right\}^N \quad (93) \end{aligned}$$

となる。ゆえに

$$NG_2^{\text{RS}} = N \log \int Dz \left\{ 2 \cosh \left(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R} \right) \right\}^n \exp \left(-\frac{\hat{q}}{2}n \right), \quad (94)$$

$$\frac{G_2^{\text{RS}}}{n} = \frac{1}{n} \log \int Dz \left\{ 2 \cosh \left(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R} \right) \right\}^n - \frac{\hat{q}}{2}. \quad (95)$$

$n \rightarrow 0$ で $A^n = 1 + n \log A$ より、(95) 式は

$$\begin{aligned} \frac{G_2^{\text{RS}}}{n} &= \frac{1}{n} \log \int Dz \left\{ 1 + n \log \left(2 \cosh \left(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R} \right) \right) \right\} - \frac{\hat{q}}{2} \\ &= \int Dz \log \left(2 \cosh \left(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R} \right) \right) - \frac{\hat{q}}{2} \quad (96) \end{aligned}$$

となる。

最後に $e^{NG_3^{\text{RS}}}$ を計算する。(85) 式より

$$e^{NG_3^{\text{RS}}} = \exp \left(-N\hat{q}q \sum_{a < b} -N\hat{R}R \sum_a \right)$$

$$= \exp \left(-N \frac{n(n-1)}{2} \hat{q}q - Nn\hat{R}R \right). \quad (97)$$

ゆえに、 $n \rightarrow 0$ で

$$e^{NG_3^{\text{RS}}} = \exp \left(N \frac{n}{2} \hat{q}q - Nn\hat{R}R \right), \quad (98)$$

$$\frac{G_3^{\text{RS}}}{n} = \frac{1}{2} \hat{q}q - \hat{R}R \quad (99)$$

となる。

以上より、レプリカ対称性を仮定した時の自由エネルギーは次のようになる。

$$\begin{aligned} -\beta f_{\text{RS}} &= \lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{G_1^{\text{RS}}}{n} + \frac{G_2^{\text{RS}}}{n} + \frac{G_3^{\text{RS}}}{n} \right) \\ &= -\frac{\alpha}{2} \left\{ \log(1 + \beta(1 - q)) - \frac{\beta}{\beta_0} (1 + \beta_0) + \frac{1}{1 + \beta^{-1} - q} \left(\frac{1 + \beta_0}{\beta_0} + q - 2R \right) \right\} \\ &\quad + \int Dz \log \left(2 \cosh \left(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R} \right) \right) - \frac{\hat{q}}{2} + \frac{1}{2} \hat{q}q - \hat{R}R. \end{aligned} \quad (100)$$

付録 B スピノードルライン

レプリカ対称性を仮定した場合の自由エネルギーは $q, \hat{q}, R, \hat{R}, \beta, \beta_0, \alpha$ の関数である。

$$-\beta f_{\text{RS}} = -\beta f_{\text{RS}}(q, \hat{q}, R, \hat{R}, \beta, \beta_0, \alpha). \quad (101)$$

鞍点方程式より、 \hat{q}, R, \hat{R} を $q, \beta, \beta_0, \alpha$ の関数として表す。

$$\begin{aligned} \hat{q} &= \hat{q}(q, \beta, \beta_0, \alpha), \\ R &= R(q, \beta, \beta_0, \alpha), \\ \hat{R} &= \hat{R}(q, \beta, \beta_0, \alpha). \end{aligned} \quad (102)$$

ここで、

$$\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)^T \equiv (\hat{q}, R, \hat{R})^T$$

とおく。解が共存する領域としない領域の境界点（スピノードル点）は、自由エネルギーの q に関する変極点と一致するので、

$$\frac{\partial^2(-\beta f_{\text{RS}})}{\partial q^2} = \frac{\partial(-\beta f_{\text{RS}})}{\partial q} = 0 \quad (103)$$

を満たす。

$\frac{\partial(-\beta f_{\text{RS}})}{\partial q} = 0$ に関しては、 $\frac{\partial(-\beta f_{\text{RS}})}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}(-\beta f_{\text{RS}}) + \sum_i \frac{\partial}{\partial r_i}(-\beta f_{\text{RS}}) \frac{\partial r_i}{\partial q}$ であるが、極値条件

$$\frac{\partial(-\beta f_{\text{RS}})}{\partial q} = \frac{\partial(-\beta f_{\text{RS}})}{\partial \hat{q}} = \frac{\partial(-\beta f_{\text{RS}})}{\partial R} = \frac{\partial(-\beta f_{\text{RS}})}{\partial \hat{R}} = 0$$

より、レプリカ対称解では常に成り立っている。

次に $\frac{\partial^2(-\beta f_{\text{RS}})}{\partial q^2} = 0$ を計算する。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial q^2} (-\beta f_{\text{RS}}(q, \mathbf{r}(q, \beta, \beta_0, \alpha), \beta, \beta_0, \alpha)) \\ &= \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial}{\partial q} (-\beta f_{\text{RS}}) + \sum_i \frac{\partial}{\partial r_i} (-\beta f_{\text{RS}}) \frac{\partial r_i}{\partial q} \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial q^2} (-\beta f_{\text{RS}}) + \sum_i \frac{\partial}{\partial r_i} \left(\frac{\partial}{\partial q} (-\beta f_{\text{RS}}) \right) \frac{\partial r_i}{\partial q} + \sum_i \frac{\partial^2}{\partial q \partial r_i} (-\beta f_{\text{RS}}) \frac{\partial r_i}{\partial q} \\ & \quad + \sum_j \frac{\partial}{\partial r_j} \left(\sum_i \frac{\partial}{\partial r_i} (-\beta f_{\text{RS}}) \frac{\partial r_i}{\partial q} \right) \frac{\partial r_j}{\partial q} + \sum_i \frac{\partial}{\partial r_i} (-\beta f_{\text{RS}}) \frac{\partial^2 r_i}{\partial q^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial q^2} (-\beta f_{\text{RS}}) + 2 \sum_i \frac{\partial^2}{\partial q \partial r_i} (-\beta f_{\text{RS}}) \frac{\partial r_i}{\partial q} + \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} (-\beta f_{\text{RS}}) \frac{\partial r_i}{\partial q} \frac{\partial r_j}{\partial q} = 0. \end{aligned} \quad (104)$$

$$\begin{aligned} -\beta f_{\text{RS}} &= \alpha \left\{ -\frac{1}{2} \log(1 + \beta(1 - q)) + \frac{\beta}{2\beta_0} (1 + \beta_0) - \frac{1}{2(1 + \beta(1 - q))} \beta (1 + \beta_0^{-1} + q - 2R) \right\} \\ & \quad + \int Dz \log \left(2 \cosh \left(\sqrt{\hat{q}} z + \hat{R} \right) \right) - \frac{\hat{q}}{2} (1 - q) - \hat{R} R \end{aligned} \quad (105)$$

より、

$$\frac{\partial}{\partial q} (-\beta f_{\text{RS}}) = 0 = -\frac{\alpha \beta^2 (q - 2R + 1 + \beta_0^{-1})}{2(1 + \beta(1 - q))^2} + \frac{\hat{q}}{2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial q^2}(-\beta f_{\text{RS}}) = -\frac{\beta \hat{q}}{(1+\beta(1-q))} - \frac{1}{2} \frac{\beta \hat{R}}{(1+\beta(1-q))}, \quad (106)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial R \partial q}(-\beta f_{\text{RS}}) = \frac{\beta \hat{R}}{(1+\beta(1-q))}, \quad \frac{\partial^2}{\partial \hat{R} \partial q}(-\beta f_{\text{RS}}) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial \hat{q} \partial q}(-\beta f_{\text{RS}}) = \frac{1}{2}, \quad (107)$$

$$\frac{\partial}{\partial R}(-\beta f_{\text{RS}}) = 0 = \frac{\alpha \beta}{(1+\beta(1-q))} - \hat{R},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2}(-\beta f_{\text{RS}}) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial \hat{R} \partial R}(-\beta f_{\text{RS}}) = -1, \quad \frac{\partial^2}{\partial \hat{q} \partial R}(-\beta f_{\text{RS}}) = 0, \quad (108)$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{q}}(-\beta f_{\text{RS}}) = 0 = \int Dz \frac{1}{\cosh^2(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R})} - \frac{1}{2}(1-q),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \hat{q}^2}(-\beta f_{\text{RS}}) &= \frac{1}{2} \int Dz \frac{-2 \cosh(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R}) \sinh(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R})}{\cosh^4(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R})} \frac{1}{2} \frac{z}{\sqrt{\hat{q}}} \\ &= -\frac{1}{2} \int Dz \left(1 - \tanh^2(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R}) - 3 \frac{\tanh^2(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R})}{\cosh^2(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R})} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(1 - 4q + 3 \int Dz \tanh^4(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R}) \right), \end{aligned} \quad (109)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \hat{R} \partial \hat{q}}(-\beta f_{\text{RS}}) = \int Dz \tanh^3(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R}) - R, \quad (110)$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{R}}(-\beta f_{\text{RS}}) = 0 = \int Dz \tanh(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R}) - R,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \hat{R}^2}(-\beta f_{\text{RS}}) = \int Dz \left(1 - \tanh^2(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R}) \right) = 1 - q. \quad (111)$$

$\frac{\partial \hat{R}}{\partial q}, \frac{\partial \hat{q}}{\partial q}, \frac{\partial R}{\partial q}$ は、鞍点方程式 $\hat{R} = \frac{\alpha \beta}{1+\beta(1-q)}, \hat{q} = \frac{\alpha \beta^2 (q-2R+1+\beta_0^{-1})}{(1+\beta(1-q))^2}, R = \int Dz \tanh(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R})$ より、

$$\frac{\partial \hat{R}}{\partial q} = \frac{\alpha \beta^2}{(1+\beta(1-q))^2} = \frac{\beta \hat{R}}{1+\beta(1-q)}, \quad (112)$$

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial q} = \frac{\alpha \beta^2}{(1+\beta(1-q))^2} \left(1 - 2 \frac{\partial R}{\partial q} \right) + \frac{2\alpha \beta^3}{(1+\beta(1-q))^3} (q - 2R + 1 + \beta_0^{-1}), \quad (113)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial q} &= -\frac{\partial \hat{q}}{\partial q} \int Dz \left(\tanh(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R}) - \tanh^3(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R}) \right) \\ &\quad + \frac{\alpha \beta^2}{(1+\beta(1-q))^2} \int Dz \frac{1}{\cosh^2(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R})}. \end{aligned} \quad (114)$$

ここで、 $\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R} \equiv V, 1 + \beta(1-q) \equiv W$ とおく。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{q}}{\partial q} &= -\frac{2\alpha \beta^2}{W^2} \frac{\partial R}{\partial q} + \frac{\alpha \beta^2}{W^2} + \frac{2\beta}{W} \hat{q}, \\ \frac{\partial R}{\partial q} &= -\frac{\partial \hat{q}}{\partial q} \left(R - \int Dz \tanh^3 V \right) + \frac{\alpha \beta^2}{W^2} (1-q), \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2\alpha \beta^2}{W^2} & 1 \\ 1 & R - \int Dz \tanh^3 V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial q} \\ \frac{\partial \hat{q}}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha \beta^2}{W^2} + \frac{2\beta}{W} \hat{q} \\ \frac{\alpha \beta^2}{W^2} (1-q) \end{pmatrix}. \quad (115)$$

連立方程式 (115) 式を解く。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

の解 x, y は

$$x = \frac{\begin{vmatrix} A & b \\ B & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & A \\ c & B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

より、

$$\frac{\partial R}{\partial q} = \frac{\left(\frac{\alpha\beta^2}{W^2} + \frac{2\beta}{W}\hat{q}\right) (R - \int Dz \tanh^3 V) - \frac{\alpha\beta^2}{W^2}(1-q)}{\frac{2\alpha\beta^2}{W^2} (R - \int Dz \tanh^3 V) - 1}, \quad (116)$$

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial q} = \frac{\frac{2\alpha^2\beta^4}{W^4}(1-q) - \frac{\alpha\beta^2}{W^2} - \frac{2\beta}{W}\hat{q}}{\frac{2\alpha\beta^2}{W^2} (R - \int Dz \tanh^3 V) - 1}. \quad (117)$$

(106), (107), (108), (109), (110), (111), (112), (116), (117) 式を用いて、(104) 式を数値的に解くことで、スピノーダル点は各 β, β_0, α において求まり、スピノーダルラインを描くことができる。

付録 C AT 安定性

レプリカ対称解の安定条件を求める [5, 14, 17]。

自由エネルギーのレプリカ対称解からのずれを計算する。

$$\begin{aligned}
f &= f_{\text{RS}} + \sum_{a < b} \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_{ab}} \Big|_{\text{RS}} (q_{ab} - q) + \frac{\partial f}{\partial \hat{q}_{ab}} \Big|_{\text{RS}} (\hat{q}_{ab} - \hat{q}) \right\} \\
&+ \sum_a \left\{ \frac{\partial f}{\partial R_a} \Big|_{\text{RS}} (R_a - R) + \frac{\partial f}{\partial \hat{R}_a} \Big|_{\text{RS}} (\hat{R}_a - \hat{R}) \right\} \\
&+ \sum_{a < b} \sum_{c < d} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial q_{ab} \partial q_{cd}} \Big|_{\text{RS}} (q_{ab} - q)(q_{cd} - q) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \hat{q}_{ab} \partial \hat{q}_{cd}} \Big|_{\text{RS}} (\hat{q}_{ab} - \hat{q})(\hat{q}_{cd} - \hat{q}) \right. \\
&+ \left. \frac{\partial^2 f}{\partial q_{ab} \partial \hat{q}_{cd}} \Big|_{\text{RS}} (q_{ab} - q)(\hat{q}_{cd} - \hat{q}) \right\} + \sum_{a < b} \sum_c \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial q_{ab} \partial R_c} \Big|_{\text{RS}} (q_{ab} - q)(R_c - R) \right. \\
&+ \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \hat{q}_{ab} \partial \hat{R}_c} \Big|_{\text{RS}} (\hat{q}_{ab} - \hat{q})(\hat{R}_c - \hat{R}) + \frac{\partial^2 f}{\partial q_{ab} \partial \hat{R}_c} \Big|_{\text{RS}} (q_{ab} - q)(\hat{R}_c - \hat{R}) \right. \\
&+ \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \hat{q}_{ab} \partial R_c} \Big|_{\text{RS}} (\hat{q}_{ab} - \hat{q})(R_c - R) \right\} + \sum_{a,b} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial R_a \partial R_b} \Big|_{\text{RS}} (R_a - R)(R_b - R) \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \hat{R}_a \partial \hat{R}_b} \Big|_{\text{RS}} (\hat{R}_a - \hat{R})(\hat{R}_b - \hat{R}) + \frac{\partial^2 f}{\partial R_a \partial \hat{R}_b} \Big|_{\text{RS}} (R_a - R)(\hat{R}_b - \hat{R}) \right\} + \dots
\end{aligned}$$

ここで、レプリカ対称解のまわりの微小変位を $(q_{ab} - q) = \epsilon_{ab}$, $(\hat{q}_{ab} - \hat{q}) = \hat{\epsilon}_{ab}$, $(R_a - R) = \gamma_a$, $(\hat{R}_a - \hat{R}) = \hat{\gamma}_a$ とおく。

レプリカ対称解は $\frac{\partial f}{\partial q} = \frac{\partial f}{\partial \hat{q}} = \frac{\partial f}{\partial R} = \frac{\partial f}{\partial \hat{R}} = 0$ を満たすので、微小変位について2次まで展開したものは、

$$\begin{aligned}
f &\simeq f_{\text{RS}} + \sum_{a < b} \sum_{c < d} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial q_{ab} \partial q_{cd}} \Big|_{\text{RS}} \epsilon_{ab} \epsilon_{cd} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \hat{q}_{ab} \partial \hat{q}_{cd}} \Big|_{\text{RS}} \hat{\epsilon}_{ab} \hat{\epsilon}_{cd} + \frac{\partial^2 f}{\partial q_{ab} \partial \hat{q}_{cd}} \Big|_{\text{RS}} \epsilon_{ab} \hat{\epsilon}_{cd} \right\} \\
&+ \sum_{a < b} \sum_c \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial q_{ab} \partial R_c} \Big|_{\text{RS}} \epsilon_{ab} \gamma_c + \frac{\partial^2 f}{\partial \hat{q}_{ab} \partial \hat{R}_c} \Big|_{\text{RS}} \hat{\epsilon}_{ab} \hat{\gamma}_c + \frac{\partial^2 f}{\partial q_{ab} \partial \hat{R}_c} \Big|_{\text{RS}} \epsilon_{ab} \hat{\gamma}_c + \frac{\partial^2 f}{\partial \hat{q}_{ab} \partial R_c} \Big|_{\text{RS}} \hat{\epsilon}_{ab} \gamma_c \right\} \\
&+ \sum_{a,b} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial R_a \partial R_b} \Big|_{\text{RS}} \gamma_a \gamma_b + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \hat{R}_a \partial \hat{R}_b} \Big|_{\text{RS}} \hat{\gamma}_a \hat{\gamma}_b + \frac{\partial^2 f}{\partial R_a \partial \hat{R}_b} \Big|_{\text{RS}} \gamma_a \hat{\gamma}_b \right\} \\
&= f_{\text{RS}} - \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \frac{1}{2} (\{\epsilon_{ab}\}, \{\gamma_a\}, \{\hat{\epsilon}_{ab}\}, \{\hat{\gamma}_a\}) G \begin{pmatrix} \{\epsilon_{ab}\} \\ \{\gamma_a\} \\ \{\hat{\epsilon}_{ab}\} \\ \{\hat{\gamma}_a\} \end{pmatrix} \quad (118)
\end{aligned}$$

となる。G はヘシアンと呼ばれる ϵ_{ab} , $\hat{\epsilon}_{ab}$, γ_a , $\hat{\gamma}_a$ についての2次形式の係数行列であり、(84), (85), (86),

(89) 式より

$$G = \begin{pmatrix} \alpha \frac{\partial^2 G_1}{\partial q_{ab} \partial q_{cd}} \Big|_{RS} & \alpha \frac{\partial^2 G_1}{\partial q_{ab} \partial \hat{R}_c} \Big|_{RS} & \frac{\partial^2 G_3}{\partial q_{ab} \partial \hat{q}_{cd}} \Big|_{RS} & \frac{\partial^2 G_3}{\partial q_{ab} \partial \hat{R}_c} \Big|_{RS} \\ \alpha \frac{\partial^2 G_1}{\partial q_{ab} \partial \hat{R}_c} \Big|_{RS} & \alpha \frac{\partial^2 G_1}{\partial \hat{R}_a \partial \hat{R}_b} \Big|_{RS} & \frac{\partial^2 G_3}{\partial \hat{q}_{ab} \partial \hat{R}_c} \Big|_{RS} & \frac{\partial^2 G_3}{\partial \hat{R}_a \partial \hat{R}_b} \Big|_{RS} \\ \frac{\partial^2 G_3}{\partial q_{ab} \partial \hat{q}_{cd}} \Big|_{RS} & \frac{\partial^2 G_3}{\partial \hat{q}_{ab} \partial \hat{R}_c} \Big|_{RS} & \frac{\partial^2 G_2}{\partial \hat{q}_{ab} \partial \hat{q}_{cd}} \Big|_{RS} & \frac{\partial^2 G_2}{\partial \hat{q}_{ab} \partial \hat{R}_c} \Big|_{RS} \\ \frac{\partial^2 G_3}{\partial q_{ab} \partial \hat{R}_c} \Big|_{RS} & \frac{\partial^2 G_3}{\partial \hat{R}_a \partial \hat{R}_b} \Big|_{RS} & \frac{\partial^2 G_2}{\partial \hat{q}_{ab} \partial \hat{R}_c} \Big|_{RS} & \frac{\partial^2 G_2}{\partial \hat{R}_a \partial \hat{R}_b} \Big|_{RS} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha dG_1 & dG_3 \\ dG_3^T & dG_2 \end{pmatrix} \quad (119)$$

と表される。ここで、 dG_1 , dG_2 , dG_3 は

$$dG_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 G_1}{\partial q_{ab} \partial q_{cd}} \Big|_{RS} & \frac{\partial^2 G_1}{\partial q_{ab} \partial \hat{R}_c} \Big|_{RS} \\ \frac{\partial^2 G_1}{\partial q_{ab} \partial \hat{R}_c} \Big|_{RS} & \frac{\partial^2 G_1}{\partial \hat{R}_a \partial \hat{R}_b} \Big|_{RS} \end{pmatrix}, \quad (120)$$

$$dG_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 G_2}{\partial \hat{q}_{ab} \partial \hat{q}_{cd}} \Big|_{RS} & \frac{\partial^2 G_2}{\partial \hat{q}_{ab} \partial \hat{R}_c} \Big|_{RS} \\ \frac{\partial^2 G_2}{\partial \hat{q}_{ab} \partial \hat{R}_c} \Big|_{RS} & \frac{\partial^2 G_2}{\partial \hat{R}_a \partial \hat{R}_b} \Big|_{RS} \end{pmatrix}, \quad (121)$$

$$dG_3 = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 G_3}{\partial q_{ab} \partial \hat{q}_{cd}} \Big|_{RS} & \frac{\partial^2 G_3}{\partial q_{ab} \partial \hat{R}_c} \Big|_{RS} \\ \frac{\partial^2 G_3}{\partial \hat{q}_{ab} \partial \hat{R}_c} \Big|_{RS} & \frac{\partial^2 G_3}{\partial \hat{R}_a \partial \hat{R}_b} \Big|_{RS} \end{pmatrix} \quad (122)$$

とおいた。

自由エネルギー f は、鞍点解で $(\{\hat{q}_{ab}\}, \{\hat{R}_a\})$ について最大であり、この時 $(\{q_{ab}\}, \{R_a\})$ については最小となる。したがって、これを満たす条件は、 $|dG_2| > 0$ かつ $|G| < 0$ である。

次の2つの行列を考える。

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ dG_2^{-1} dG_3^T & E \end{pmatrix}, \quad \hat{Q} = \begin{pmatrix} d\hat{G}_1 & 0 \\ 0 & dG_2 \end{pmatrix}, \quad (123)$$

$$d\hat{G}_1 = \alpha dG_1 - dG_3^T dG_2^{-1} dG_3 \quad (124)$$

を考える。

$$G = \hat{P}^T \hat{Q} \hat{P}, \quad |\hat{P}| = 1, \quad |\hat{Q}| = |d\hat{G}_1| |dG_2| \quad (125)$$

より、

$$|G| = |d\hat{G}_1| |dG_2|. \quad (126)$$

以上より、 $|dG_2| > 0$ かつ $|G| < 0$ を満たすのは、 $|dG_2| > 0$ かつ $|d\hat{G}_1| < 0$ のときである。

まず G_1 に関する部分について具体的に計算する。(86) 式より、

$$e^{\frac{G_1}{\alpha}} = \left(\int \frac{du_0 d\hat{u}_0}{2\pi} \left\{ \prod_a \frac{du_a d\hat{u}_a}{2\pi} \right\} dy \sqrt{\frac{\beta_0}{2\pi}} \exp \left\{ i\hat{u}_0 u_0 + i \sum_a \hat{u}_a u_a - \frac{\sum_a (\hat{u}_a)^2}{2} - \sum_{a<b} q_{ab} \hat{u}_a \hat{u}_b \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_a R_a \hat{u}_0 \hat{u}_a - \frac{1}{2} (\hat{u}_0)^2 - \frac{\beta_0}{2} (y - u_0)^2 - \beta \sum_a \frac{(u_a)^2}{2} - \beta \sum_a y u_a \right\} \right). \quad (127)$$

ここで、 $\mathbf{x} \equiv (u_1, \dots, u_n, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n, y, u_0, \hat{u}_0) = (\{u_a\}, \{\hat{u}_a\}, y, u_0, \hat{u}_0)$ とおく。

また

$$d\mathbf{x} \equiv \left\{ \prod_a \frac{du_a d\hat{u}_a}{2\pi} \right\} \sqrt{\frac{\beta_0}{2\pi}} dy \frac{du_0 d\hat{u}_0}{2\pi}, \quad (128)$$

$$L(\{q_{ab}\}, \{R_a\}, \mathbf{x}) = i\hat{u}_0 u_0 + i \sum_a \hat{u}_a u_a - \frac{\sum_a (\hat{u}_a)^2}{2} - \sum_{a<b} q_{ab} \hat{u}_a \hat{u}_b - \sum_a R_a \hat{u}_0 \hat{u}_a \\ - \frac{1}{2} (\hat{u}_0)^2 - \frac{\beta_0}{2} (y - u_0)^2 - \beta \sum_a \frac{(u_a)^2}{2} - \beta \sum_a y u_a \quad (129)$$

とおくと (127) 式は

$$e^{\frac{G_1}{\alpha}} = \int d\mathbf{x} e^{L(\{q_{ab}\}, \{R_a\}, \mathbf{x})}, \quad (130)$$

$$\frac{G_1}{\alpha} = \log \left\{ \int d\mathbf{x} e^L \right\} \quad (131)$$

と表される。

$\frac{G_1}{\alpha}$ を $\{q_{ab}\}, \{R_a\}$ について 2 階微分する。

$$\frac{\partial}{\partial q_{ab}} \frac{G_1}{\alpha} = \frac{\partial}{\partial q_{ab}} \frac{\int d\mathbf{x} e^L}{\int d\mathbf{x} e^L} = \left(e^{\frac{G_1}{\alpha}} \right)^{-1} \int d\mathbf{x} e^L \frac{\partial L}{\partial q_{ab}}$$

より、

$$\frac{\partial^2}{\partial q_{ab} \partial q_{cd}} \frac{G_1}{\alpha} = \frac{\partial}{\partial q_{cd}} \left(e^{\frac{G_1}{\alpha}} \right)^{-1} \int d\mathbf{x} e^L \frac{\partial L}{\partial q_{ab}} \\ = \left(e^{\frac{G_1}{\alpha}} \right)^{-1} \int d\mathbf{x} e^L \left(\frac{\partial L}{\partial q_{ab}} \frac{\partial L}{\partial q_{cd}} + \frac{\partial^2 L}{\partial q_{ab} \partial q_{cd}} \right) \\ - \left(e^{\frac{2G_1}{\alpha}} \right)^{-1} \int d\mathbf{x} e^L \frac{\partial L}{\partial q_{ab}} \int d\mathbf{x} e^L \frac{\partial L}{\partial q_{cd}}, \quad (132)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial R_a \partial R_b} \frac{G_1}{\alpha} = \frac{\partial}{\partial R_b} \left(e^{\frac{G_1}{\alpha}} \right)^{-1} \int d\mathbf{x} e^L \frac{\partial L}{\partial R_a} \\ = \left(e^{\frac{G_1}{\alpha}} \right)^{-1} \int d\mathbf{x} e^L \left(\frac{\partial L}{\partial R_a} \frac{\partial L}{\partial R_b} + \frac{\partial^2 L}{\partial R_a \partial R_b} \right) \\ - \left(e^{\frac{2G_1}{\alpha}} \right)^{-1} \int d\mathbf{x} e^L \frac{\partial L}{\partial R_a} \int d\mathbf{x} e^L \frac{\partial L}{\partial R_b}, \quad (133)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial q_{ab} \partial R_c} \frac{G_1}{\alpha} = \frac{\partial}{\partial R_c} \left(e^{\frac{G_1}{\alpha}} \right)^{-1} \int d\mathbf{x} e^L \frac{\partial L}{\partial q_{ab}} \\ = \left(e^{\frac{G_1}{\alpha}} \right)^{-1} \int d\mathbf{x} e^L \left(\frac{\partial L}{\partial q_{ab}} \frac{\partial L}{\partial R_c} + \frac{\partial^2 L}{\partial q_{ab} \partial R_c} \right)$$

$$-\left(e^{\frac{2G_1}{\alpha}}\right)^{-1} \int d\mathbf{x}e^L \frac{\partial L}{\partial q_{ab}} \int d\mathbf{x}e^L \frac{\partial L}{\partial R_c} \quad (134)$$

となる。ここで、

$$\frac{\partial L}{\partial q_{ab}} = -\hat{u}_a \hat{u}_b, \quad \frac{\partial L}{\partial R_a} = -\hat{u}_0 \hat{u}_a, \quad (135)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_{ab} \partial q_{cd}} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial R_a \partial R_b} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial q_{ab} \partial R_c} = 0 \quad (136)$$

であり、 $e^{\frac{G_1}{\alpha}}$ は $n \rightarrow 0$ で 1 である。また、

$$\int d\mathbf{x}e^L A \equiv \mathbb{E}_L(A)$$

とおくと、 $\left. \frac{\partial^2}{\partial q_{ab} \partial q_{cd}} \frac{G_1}{\alpha} \right|_{\text{RS}}$ 、 $\left. \frac{\partial^2}{\partial R_a \partial R_b} \frac{G_1}{\alpha} \right|_{\text{RS}}$ 、 $\left. \frac{\partial^2}{\partial q_{ab} \partial R_c} \frac{G_1}{\alpha} \right|_{\text{RS}}$ は (132), (133), (134) 式より次のように表わせる。

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial q_{ab} \partial q_{cd}} \frac{G_1}{\alpha} \right|_{\text{RS}} = \mathbb{E}_{L|\text{RS}}(\hat{u}_a \hat{u}_b \hat{u}_c \hat{u}_d) - \mathbb{E}_{L|\text{RS}}(\hat{u}_a \hat{u}_b) \mathbb{E}_{L|\text{RS}}(\hat{u}_c \hat{u}_d), \quad (137)$$

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial R_a \partial R_b} \frac{G_1}{\alpha} \right|_{\text{RS}} = \mathbb{E}_{L|\text{RS}}((\hat{u}_0)^2 \hat{u}_a \hat{u}_b) - \mathbb{E}_{L|\text{RS}}(\hat{u}_0 \hat{u}_a) \mathbb{E}_{L|\text{RS}}(\hat{u}_0 \hat{u}_b), \quad (138)$$

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial q_{ab} \partial R_c} \frac{G_1}{\alpha} \right|_{\text{RS}} = \mathbb{E}_{L|\text{RS}}(\hat{u}_0 \hat{u}_a \hat{u}_b \hat{u}_c) - \mathbb{E}_{L|\text{RS}}(\hat{u}_0 \hat{u}_a) \mathbb{E}_{L|\text{RS}}(\hat{u}_b \hat{u}_c). \quad (139)$$

(137), (138), (139) 式を具体的に求める。(137) 式については、添字 a, b, c, d の取り方が $\sum_{a < b} \sum_{c < d}$ より $\frac{n(n-1)}{2} \times \frac{n(n-1)}{2}$ 通りあり、3つのグループに分けられる。

I レプリカ添字が2つ一致する時 ($a = c, b = d$)

1. $\frac{n(n-1)}{2}$ 通り

$$P \equiv \mathbb{E}_{L|\text{RS}}(\hat{u}_a^2 \hat{u}_b^2) - \mathbb{E}_{L|\text{RS}}(\hat{u}_a \hat{u}_b)^2. \quad (140)$$

II 1つだけ一致する時 ($a = c$ かつ $b \neq d$ or $a = d$ or $b = c$ or $b = d$ かつ $a \neq c$)

$2(n-2) \cdot \frac{n(n-1)}{2}$ 通り

$$\begin{aligned} Q &\equiv \mathbb{E}_{L|\text{RS}}(\hat{u}_a^2 \hat{u}_b \hat{u}_c) - \mathbb{E}_{L|\text{RS}}(\hat{u}_a \hat{u}_b) \mathbb{E}_{L|\text{RS}}(\hat{u}_a \hat{u}_c) \\ &= \mathbb{E}_{L|\text{RS}}(\hat{u}_a^2 \hat{u}_b \hat{u}_c) - \mathbb{E}_{L|\text{RS}}(\hat{u}_a \hat{u}_b)^2. \end{aligned} \quad (141)$$

III 全て異なる時

$\frac{(n-2)(n-3)}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}$ 通り

$$R \equiv \mathbb{E}_{L|\text{RS}}(\hat{u}_a \hat{u}_b \hat{u}_c \hat{u}_d) - \mathbb{E}_{L|\text{RS}}(\hat{u}_a \hat{u}_b)^2. \quad (142)$$

(138) 式の添字の取り方は、 $\sum_{a, b}$ より $n \times n$ 通りあり、2つのグループに分けられる。

I $a = b$ の時

n 通り

$$A \equiv \mathbb{E}_{L|\text{RS}}((\hat{u}_0)^2 \hat{u}_a^2) - \mathbb{E}_{L|\text{RS}}(\hat{u}_0 \hat{u}_a)^2. \quad (143)$$

II $a \neq b$ の時

$n(n-1)$ 通り

$$B \equiv \mathbb{E}_{L|\text{RS}}((\hat{u}_0)^2 \hat{u}_a \hat{u}_b) - \mathbb{E}_{L|\text{RS}}(\hat{u}_0 \hat{u}_a)^2. \quad (144)$$

(139) 式の添字の取り方は、 $\sum_{a<b} \sum_c$ より $n \frac{n(b-1)}{2}$ 通りあり、2つのグループに分けられる。

I 添字が1つ一致する時 ($a = c$ or $b = c$)

$$2 \frac{n(n-1)}{2} = n(n-1) \text{ 通り}$$

$$C \equiv \mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_0 \hat{u}_a^2 \hat{u}_b) - \mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_0 \hat{u}_a) \mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_a \hat{u}_b). \quad (145)$$

II 全て異なる時

$$(n-2) \cdot \frac{n(n-1)}{2} \text{ 通り}$$

$$D \equiv \mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_0 \hat{u}_a \hat{u}_b \hat{u}_c) - \mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_0 \hat{u}_a) \mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_b \hat{u}_c). \quad (146)$$

ここで $\mathbb{E}_{L|RS}(A)$ を具体的に計算する。(90) 式より、

$$\begin{aligned} e^{\frac{G_1^{\text{RS}}}{\alpha}} &= \int Dt \int \left\{ \prod_a \frac{d\hat{u}_a}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{\beta}} \exp\left(-\frac{1}{2}\hat{u}_a^2 + \frac{\beta}{2} \frac{1+\beta_0}{\beta_0} t^2 - \frac{\hat{u}_a^2}{2\beta} + i\sqrt{\frac{1+\beta_0}{\beta_0}} t \hat{u}_a\right) \right\} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{q}{2} \left(\sum_a \hat{u}_a\right)^2 + \frac{q}{2} \sum_a \hat{u}_a^2 - \frac{n\beta R^2}{2} \left(\sum_a \hat{u}_a\right)^2\right) \\ &\quad - in\beta \sqrt{\frac{1+\beta_0}{\beta_0}} Rt \sum_a \hat{u}_a + R \left(\sum_a \hat{u}_a\right)^2 \\ &= \int Dt \int Dz \exp\left(\frac{n\beta}{2} \frac{(1+\beta_0)}{\beta_0} t^2\right) \prod_{a=1}^n \left[\int d\hat{u}_a \sqrt{\frac{1}{2\pi\beta}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\beta} - q\right)\hat{u}_a^2\right) \right] \\ &\quad \times \prod_{a=1}^n \left[\exp\left(i \left\{ \sqrt{\frac{1+\beta_0}{\beta_0}} t - n\beta \sqrt{\frac{1+\beta_0}{\beta_0}} Rt + \sqrt{q - 2R + n\beta R^2} z \right\} \hat{u}_a\right) \right] \\ &= \int \left(\prod_{a=1}^n d\hat{u}_a \right) \left(\frac{1}{2\pi\beta} \right)^{\frac{n}{2}} \int Dt \int Dz \exp\left(\frac{n\beta}{2} \frac{(1+\beta_0)}{\beta_0} t^2\right) \prod_{a=1}^n \exp\left(-\frac{V}{2}\hat{u}_a^2 + W\hat{u}_a\right). \end{aligned} \quad (147)$$

ただし $V = 1 - q + \frac{1}{\beta}$, $W = i \left\{ \sqrt{\frac{1+\beta_0}{\beta_0}} (1 - n\beta R)t + \sqrt{q - 2R + n\beta R^2} z \right\} = i(W_t t + W_z z)$ とおいた。

$$\begin{aligned} I_k &\equiv \int dx x^k \exp\left(-\frac{V}{2}x^2 + Wx\right) = \int dx x^k \exp\left(-\frac{V}{2}\left(x - \frac{W}{V}\right)^2 + \frac{W^2}{2V}\right) \\ &= \exp\left(\frac{W^2}{2V}\right) \int dx x^k \exp\left(-\frac{V}{2}\left(x - \frac{W}{V}\right)^2\right) \\ &= \exp\left(\frac{W^2}{2V}\right) \int dy \frac{1}{\sqrt{V}} \left(\frac{y}{\sqrt{V}} + \frac{W}{V}\right)^k \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} I_1 &= \exp\left(\frac{W^2}{2V}\right) \int dy \frac{1}{\sqrt{V}} \left(\frac{y}{\sqrt{V}} + \frac{W}{V}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \\ &= \exp\left(\frac{W^2}{2V}\right) \left\{ \frac{1}{V} \int dy y \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) + \frac{W}{V\sqrt{V}} \int dy \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \right\} \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{V}} \exp\left(\frac{W^2}{2V}\right) \frac{W}{V}, \quad (148) \\ I_2 &= \exp\left(\frac{W^2}{2V}\right) \int dy \frac{1}{\sqrt{V}} \left(\frac{y}{\sqrt{V}} + \frac{W}{V}\right)^2 \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \end{aligned}$$

$$= \exp\left(\frac{W^2}{2V}\right) \sqrt{\frac{2\pi}{V}} \frac{1}{V^2} (W^2 + V), \quad (149)$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \exp\left(\frac{W^2}{2V}\right) \int dy \frac{1}{\sqrt{V}} \left(\frac{y}{\sqrt{V}} + \frac{W}{V}\right)^3 \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \\ &= \exp\left(\frac{W^2}{2V}\right) \sqrt{\frac{2\pi}{V}} \frac{1}{V^3} (W^3 + 3VW), \end{aligned} \quad (150)$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \exp\left(\frac{W^2}{2V}\right) \int dy \frac{1}{\sqrt{V}} \left(\frac{y}{\sqrt{V}} + \frac{W}{V}\right)^4 \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) \\ &= \exp\left(\frac{W^2}{2V}\right) \sqrt{\frac{2\pi}{V}} \frac{1}{V^4} (W^4 + 6W^2V + 3V^2). \end{aligned} \quad (151)$$

これを用いると、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{L|\text{RS}}(\hat{u}_a \hat{u}_b) &= \int d\mathbf{x} e^{L|\text{RS}} \hat{u}_a \hat{u}_b \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\beta}\right)^{\frac{n}{2}} \int Dt \int Dz \exp\left(\frac{n\beta}{2} \frac{(1+\beta_0)}{\beta_0} t^2\right) \\ &\quad \times \int \left(\prod_{\gamma=1}^n d\hat{u}_\gamma\right) \prod_{\gamma=1}^n \exp\left(-\frac{V}{2} \hat{u}_\gamma^2 + W \hat{u}_\gamma\right) \hat{u}_a \hat{u}_b \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\beta}\right)^{\frac{n}{2}} \int Dt \int Dz \exp\left(\frac{n\beta}{2} \frac{(1+\beta_0)}{\beta_0} t^2\right) \\ &\quad \times \int \left(\prod_{\gamma \neq a,b}^n d\hat{u}_\gamma\right) \prod_{\gamma=1}^n \exp\left(-\frac{V}{2} \hat{u}_\gamma^2 + W \hat{u}_\gamma\right) \int d\hat{u}_a \exp\left(-\frac{V}{2} \hat{u}_a^2 + W \hat{u}_a\right) \hat{u}_a \\ &\quad \times \int d\hat{u}_b \exp\left(-\frac{V}{2} \hat{u}_b^2 + W \hat{u}_b\right) \hat{u}_b \\ &= \int Dt Dz \left(\frac{1}{2\pi\beta}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{n\beta}{2} \frac{(1+\beta_0)}{\beta_0} t^2\right) \left(\sqrt{\frac{2\pi}{V}} e^{\frac{W^2}{2V}}\right)^{n-2} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{V}} e^{\frac{W^2}{2V}} \frac{W}{V}\right)^2 \\ &= \int Dt Dz \left(\frac{1}{2\pi\beta}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(\frac{n\beta}{2} \frac{(1+\beta_0)}{\beta_0} t^2\right) \left(\sqrt{\frac{2\pi}{V}} e^{\frac{W^2}{2V}}\right)^n \frac{W^2}{V^2}. \end{aligned} \quad (152)$$

$n \rightarrow 0$ の極限をとると、

$$\mathbb{E}_{L|\text{RS}}(\hat{u}_a \hat{u}_b) = \int Dt Dz \frac{W^2}{V^2}. \quad (153)$$

同様に、

$$\mathbb{E}_{L|\text{RS}}(\hat{u}_a^2 \hat{u}_b^2) = \int Dt Dz \frac{1}{V^4} (W^2 + V)^2, \quad (154)$$

$$\mathbb{E}_{L|\text{RS}}(\hat{u}_a^2 \hat{u}_b \hat{u}_c) = \int Dt Dz \frac{W^2}{V^4} (W^2 + V), \quad (155)$$

$$\mathbb{E}_{L|\text{RS}}(\hat{u}_a \hat{u}_b \hat{u}_c \hat{u}_d) = \int Dt Dz \frac{W^4}{V^4}, \quad (156)$$

$$\mathbb{E}_{L|\text{RS}}(\hat{u}_a^4) = \int Dt Dz \frac{1}{V^4} (W^4 + 6W^2V + 3V^2), \quad (157)$$

$$\mathbb{E}_{L|\text{RS}}(\hat{u}_a^3 \hat{u}_b) = \int Dt Dz \frac{W}{V^4} (W^3 + 3VW). \quad (158)$$

W は、 $n \rightarrow 0$ で、 $W = i(W_t t + W_z z) \rightarrow i(w_t t + w_z z)$ となる。ただし、 $w_t = \sqrt{\frac{1+\beta_0}{\beta_0}}$ 、 $w_z = \sqrt{q-2R}$ である。また次の公式 $\int Dxx = 0$ 、 $\int Dxx^2 = 1$ 、 $\int Dxx^3 = 0$ 、 $\int Dxx^4 = 3$ を用いると、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_a \hat{u}_b) &= \int Dt Dz \frac{W^2}{V^2} = \int Dt Dz \frac{-1}{V^2} (w_t^2 t^2 + 2w_t w_z t z + w_z^2 z^2) = -\frac{1}{V^2} (w_t^2 + w_z^2) \\ &= -\frac{\frac{1+\beta_0}{\beta_0} + q - 2R}{(1-q + \frac{1}{\beta})^2} = -\frac{\beta^2(1+q-2R+\beta_0^{-1})}{[1+\beta(1-q)]^2} \end{aligned} \quad (159)$$

となる。

次に、 \hat{u}_0 に関する平均を具体的に計算する。 $\frac{G_1}{\alpha}$ に $h_0 \hat{u}_0$ を付加した $e^{\frac{G_1}{\alpha} + h_0 \hat{u}_0}$ を計算し、最後に $h_0 \rightarrow 0$ の極限をとる。

$$\begin{aligned} e^{\frac{G_1}{\alpha} + h_0 \hat{u}_0} &= \int d\mathbf{x} e^{L+h_0 \hat{u}_0} \\ &= \int \frac{du_0 d\hat{u}_0}{2\pi} \left\{ \prod_a \frac{du_a d\hat{u}_a}{2\pi} \right\} dy \sqrt{\frac{\beta_0}{2\pi}} \exp \left\{ i\hat{u}_0 u_0 + i \sum_a \hat{u}_a u_a - \frac{\sum_a (\hat{u}_a)^2}{2} - \sum_{a<b} q_{ab} \hat{u}_a \hat{u}_b \right. \\ &\quad \left. - \sum_a R_a \hat{u}_0 \hat{u}_a - \frac{1}{2} (\hat{u}_0)^2 - \frac{\beta_0}{2} (y-u_0)^2 - \beta \sum_a \frac{(u_a)^2}{2} - \beta y \sum_a u_a + h_0 \hat{u}_0 \right\} \\ &= \int Dt \int \left(\prod_{a=1}^n d\hat{u}_a \right) \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_a \hat{u}_a^2 - \sum_{a<b} q_{ab} \hat{u}_a \hat{u}_b \right) \\ &\quad \times \left(\prod_{a=1}^n \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{\beta}} \exp \left(\frac{1}{2\beta} \left\{ \beta^2 \frac{(1+\beta_0)}{\beta_0} \tau^2 - \beta^2 (\sum_b R_b \hat{u}_b)^2 - \hat{u}_a^2 \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - 2i\beta^2 \sqrt{\frac{1+\beta_0}{\beta_0}} \tau \sum_b R_b \hat{u}_b + 2\beta \sum_b R_b \hat{u}_a \hat{u}_b + 2i\beta \sqrt{\frac{1+\beta_0}{\beta_0}} \tau \hat{u}_a \right\} \right) \right). \end{aligned} \quad (160)$$

ここで、 $\tau \equiv t + i\sqrt{\frac{\beta_0}{1+\beta_0}} h_0$ とする。 $h_0 \rightarrow 0$ で $\tau \rightarrow t$ となる。レプリカ対称性を仮定すると

$$\begin{aligned} e^{\frac{G_1^{RS}}{\alpha} + h_0 \hat{u}_0} &= \int Dt \int Dz \exp \left(\frac{n\beta}{2} \frac{(1+\beta_0)}{\beta_0} \tau^2 \right) \prod_{a=1}^n \int d\hat{u}_a \sqrt{\frac{1}{2\pi\beta}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\beta} - q\right) \hat{u}_a^2 \right) \\ &\quad \times \prod_{a=1}^n \exp \left(i \left\{ \sqrt{\frac{1+\beta_0}{\beta_0}} \tau - n\beta \sqrt{\frac{1+\beta_0}{\beta_0}} R\tau + \sqrt{q-2R+n\beta R^2} z \right\} \hat{u}_a \right) \\ &= \int \left(\prod_{a=1}^n d\hat{u}_a \right) \left(\frac{1}{2\pi\beta} \right)^{\frac{n}{2}} \int Dt \int Dz \exp \left(\frac{n\beta}{2} \frac{(1+\beta_0)}{\beta_0} \tau^2 \right) \prod_{a=1}^n \exp \left(-\frac{V}{2} \hat{u}_a^2 + W \hat{u}_a \right). \end{aligned} \quad (161)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e^{\frac{G_1^{RS}}{\alpha} + h_0 \hat{u}_0}}{\partial h_0} &= \int d\mathbf{x} \frac{\partial}{\partial h_0} e^{L|RS+h_0 \hat{u}_0} = \int d\mathbf{x} e^{L|RS+h_0 \hat{u}_0} \hat{u}_0 \\ &= \lim_{n \rightarrow 0} \int \left(\prod_{a=1}^n d\hat{u}_a \right) \left(\frac{1}{2\pi\beta} \right)^{\frac{n}{2}} \int Dt \int Dz \frac{\partial}{\partial h_0} \exp \left(\frac{n\beta}{2} \frac{(1+\beta_0)}{\beta_0} \tau^2 \right) \\ &\quad \times \prod_{a=1}^n \exp \left(-\frac{V}{2} \hat{u}_a^2 + W \hat{u}_a \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow 0} \int \left(\prod_{a=1}^n d\hat{u}_a \right) \left(\frac{1}{2\pi\beta} \right)^{\frac{n}{2}} \int Dt \left(n \frac{(1+\beta_0)}{\beta_0} \beta\tau + iW_t \sum_{a=1}^n \hat{u}_a \right) \\
&\quad \times \frac{\partial\tau}{\partial h_0} \exp \left(\frac{n\beta}{2} \frac{(1+\beta_0)}{\beta_0} \tau^2 \right) \int Dz \prod_{a=1}^n \exp \left(-\frac{V}{2} \hat{u}_a^2 + i(W_t\tau + W_z z) \hat{u}_a \right) \quad (162)
\end{aligned}$$

$h_0 \rightarrow 0$ の極限をとる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e^{\frac{G_1^{\text{RS}}}{\alpha} + h_0 \hat{u}_0}}{\partial h_0} &= \int d\mathbf{x} e^{L|\text{RS}} \hat{u}_0 = \mathbb{E}_{L|\text{RS}}(\hat{u}_0) \\
&= \lim_{n \rightarrow 0} \int \left(\prod_{a=1}^n d\hat{u}_a \right) \left(\frac{1}{2\pi\beta} \right)^{\frac{n}{2}} \int Dt \left(n \frac{(1+\beta_0)}{\beta_0} \beta t + iW_t \sum_{a=1}^n \hat{u}_a \right) \\
&\quad \times i \sqrt{\frac{\beta_0}{1+\beta_0}} \exp \left(\frac{n\beta}{2} \frac{(1+\beta_0)}{\beta_0} t^2 \right) \int Dz \prod_{a=1}^n \exp \left(-\frac{V}{2} \hat{u}_a^2 + i(W_t t + W_z z) \hat{u}_a \right) \\
&= \int Dt \int Dz \left(-\sqrt{\frac{\beta_0}{1+\beta_0}} W_t \right) \int \left(\prod_{\gamma=1}^n d\hat{u}_\gamma \right) \prod_{\gamma=1}^n \exp \left(-\frac{V}{2} \hat{u}_\gamma^2 + W \hat{u}_\gamma \right) \sum_{a=1}^n \hat{u}_a \\
&= -\sqrt{\frac{\beta_0}{1+\beta_0}} W_t \sum_{a=1}^n \int d\mathbf{x} e^{L|\text{RS}} \hat{u}_a \\
&= -\sqrt{\frac{\beta_0}{1+\beta_0}} W_t \sum_{a=1}^n \mathbb{E}_{L|\text{RS}}(\hat{u}_a). \quad (163)
\end{aligned}$$

$W_t = \sqrt{\frac{1+\beta_0}{\beta_0}} (1 - n\beta R)$ は $n \rightarrow 0$ で $\sqrt{\frac{1+\beta_0}{\beta_0}}$ より、

$$\mathbb{E}_{L|\text{RS}}(\hat{u}_0) = -\sum_{a=1}^n \mathbb{E}_{L|\text{RS}}(\hat{u}_a). \quad (164)$$

同様に、

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{L|\text{RS}}(\hat{u}_0^2) &= \frac{\partial^2 e^{\frac{G_1^{\text{RS}}}{\alpha} + h_0 \hat{u}_0}}{\partial h_0^2} \\
&= \int d\mathbf{x} e^{L|\text{RS}} \left(\sum_c \hat{u}_c^2 + 2 \sum_{c<d} \hat{u}_c \hat{u}_d \right) = \mathbb{E}_{L|\text{RS}} \left(\sum_{c=1}^n \hat{u}_c^2 + 2 \sum_{c<d} \hat{u}_c \hat{u}_d \right), \quad (165)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{L|\text{RS}}(\hat{u}_a \hat{u}_b \hat{u}_0^2) &= \mathbb{E}_{L|\text{RS}} \left(\hat{u}_a \hat{u}_b \left\{ \sum_{c=1}^n \hat{u}_c^2 + 2 \sum_{c<d} \hat{u}_c \hat{u}_d \right\} \right) \\
&= \mathbb{E}_{L|\text{RS}} \left(\hat{u}_a^3 \hat{u}_b + \hat{u}_a \hat{u}_b^3 + \hat{u}_a \hat{u}_b \sum_{c \neq a, b} \hat{u}_c^2 + 2\hat{u}_a^2 \hat{u}_b^2 + 2 \sum_{a<d} \hat{u}_a^2 \hat{u}_b \hat{u}_d + 2 \sum_{b<d} \hat{u}_a \hat{u}_b^2 \hat{u}_d \right. \\
&\quad \left. + 2 \sum_{c(\neq a, b) < d(\neq a, b)} \hat{u}_a \hat{u}_b \hat{u}_c \hat{u}_d \right) \\
&= \mathbb{E}_{L|\text{RS}} (2\hat{u}_a^3 \hat{u}_b + 2\hat{u}_a^2 \hat{u}_b^2 + 5(n-2)\hat{u}_a^2 \hat{u}_b \hat{u}_c + (n-2)(n-3)\hat{u}_a \hat{u}_b \hat{u}_c \hat{u}_d), \quad (166) \\
\mathbb{E}_{L|\text{RS}}(\hat{u}_0^2 \hat{u}_a^2) &= \mathbb{E}_{L|\text{RS}} \left(\left\{ \sum_{c=1}^n \hat{u}_c^2 + 2 \sum_{c<d} \hat{u}_c \hat{u}_d \right\} \hat{u}_a^2 \right)
\end{aligned}$$

$$= \mathbb{E}_{L|RS} (\hat{u}_a^4 + (n-1)\hat{u}_a^2\hat{u}_c^2 + 2(n-1)\hat{u}_a^3\hat{u}_d + (n-1)(n-2)\hat{u}_a^2\hat{u}_c\hat{u}_d), \quad (167)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{L|RS} (\hat{u}_0\hat{u}_a^2\hat{u}_b) &= \mathbb{E}_{L|RS} \left(\left\{ -\sum_{c=1}^n \hat{u}_c \right\} \hat{u}_a^2\hat{u}_b \right) \\ &= -\mathbb{E}_{L|RS} (\hat{u}_a^3\hat{u}_b + \hat{u}_a^2\hat{u}_b^2 + (n-2)\hat{u}_a^2\hat{u}_b\hat{u}_c), \end{aligned} \quad (168)$$

$$\mathbb{E}_{L|RS} (\hat{u}_0\hat{u}_a\hat{u}_b\hat{u}_c) = -\mathbb{E}_{L|RS} (3\hat{u}_a^2\hat{u}_b\hat{u}_c + (n-3)\hat{u}_a\hat{u}_b\hat{u}_c\hat{u}_d), \quad (169)$$

$$\mathbb{E}_{L|RS} (\hat{u}_0\hat{u}_a) = -\mathbb{E}_{L|RS} (\hat{u}_a^2 + (n-1)\hat{u}_a\hat{u}_b). \quad (170)$$

$n \rightarrow 0$ の極限をとると

$$\mathbb{E}_{L|RS} (\hat{u}_a\hat{u}_b\hat{u}_0^2) = \mathbb{E}_{L|RS} (2\hat{u}_a^3\hat{u}_b + 2\hat{u}_a^2\hat{u}_b^2 - 10\hat{u}_a^2\hat{u}_b\hat{u}_d + 6\hat{u}_a\hat{u}_b\hat{u}_c\hat{u}_d), \quad (171)$$

$$\mathbb{E}_{L|RS} (\hat{u}_a^2\hat{u}_0^2) = \mathbb{E}_{L|RS} (\hat{u}_a^4 - \hat{u}_a^2\hat{u}_b^2 - 2\hat{u}_a^3\hat{u}_b + 2\hat{u}_a^2\hat{u}_b\hat{u}_c), \quad (172)$$

$$\mathbb{E}_{L|RS} (\hat{u}_0\hat{u}_a^2\hat{u}_b) = -\mathbb{E}_{L|RS} (\hat{u}_a^3\hat{u}_b + \hat{u}_a^2\hat{u}_b^2 - 2\hat{u}_a^2\hat{u}_b\hat{u}_c), \quad (173)$$

$$\mathbb{E}_{L|RS} (\hat{u}_0\hat{u}_a\hat{u}_b\hat{u}_c) = -\mathbb{E}_{L|RS} (3\hat{u}_a^2\hat{u}_b\hat{u}_c - 3\hat{u}_a\hat{u}_b\hat{u}_c\hat{u}_d), \quad (174)$$

$$\mathbb{E}_{L|RS} (\hat{u}_0\hat{u}_a) = -\mathbb{E}_{L|RS} (\hat{u}_a^2 - \hat{u}_a\hat{u}_b). \quad (175)$$

次に G_2 を計算する。(84) 式より、

$$e^{NG_2} = \frac{1}{2^N} \sum_{\boldsymbol{\eta}} \sum_{\mathbf{s}_a} \left\{ \prod_i \exp \left(\sum_{a<b} \hat{q}_{ab}s_{ia}s_{ib} + \sum_a \hat{R}_a s_{ia} \eta_i \right) \right\}. \quad (176)$$

ここで、ゲージ変換 $s_{ia} \rightarrow s_{ia}\eta_i$ を行う。 e^{NG_2} はこの変換に対して不変であるので、次のように変形できる。

$$\begin{aligned} e^{NG_2} &= \frac{1}{2^N} \sum_{\boldsymbol{\eta}} \sum_{\mathbf{s}_a} \left\{ \prod_i \exp \left(\sum_{a<b} \hat{q}_{ab}s_{ia}s_{ib}\eta_i^2 + \sum_a \hat{R}_a s_{ia}\eta_i^2 \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2^N} \sum_{\mathbf{s}_a} \left\{ \prod_i \exp \left(\sum_{a<b} \hat{q}_{ab}s_{ia}s_{ib} + \sum_a \hat{R}_a s_{ia} \right) \sum_{\eta_i} 1 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{\mathbf{s}_a} \exp \left(\sum_{a<b} \hat{q}_{ab}s_a s_b + \sum_a \hat{R}_a s_a \right) \right\}^N. \end{aligned} \quad (177)$$

ゆえに

$$NG_2 = N \log \left\{ \sum_{\mathbf{s}_a} \exp \left(\sum_{a<b} \hat{q}_{ab}s_a s_b + \sum_a \hat{R}_a s_a \right) \right\}, \quad (178)$$

$$G_2 = \log \left\{ \sum_{\mathbf{s}_a} \exp \left(\sum_{a<b} \hat{q}_{ab}s_a s_b + \sum_a \hat{R}_a s_a \right) \right\}. \quad (179)$$

ここで $\hat{L}(\{\hat{q}_{ab}\}, \{\hat{R}_a\}, \{s_a\}) \equiv \sum_{a<b} \hat{q}_{ab}s_a s_b + \sum_a \hat{R}_a s_a$ とおく。

G_2 を $\{\hat{q}_{ab}\}, \{\hat{R}_a\}$ について 2 階微分する。

e^{G_2} は $n \rightarrow 0$ で 1 である。また、

$$\sum_{\mathbf{s}_a} e^{\hat{L}} A \equiv \mathbb{E}_{\hat{L}}(A)$$

とおくと、 $\frac{\partial^2}{\partial \hat{q}_{ab} \partial \hat{q}_{cd}} G_2$, $\frac{\partial^2}{\partial \hat{R}_a \partial \hat{R}_b} G_2$, $\frac{\partial^2}{\partial \hat{q}_{ab} \partial \hat{R}_c} G_2$ は次のように表される。

$$\frac{\partial^2}{\partial \hat{q}_{ab} \partial \hat{q}_{cd}} G_2 = \mathbb{E}_{\hat{L}} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \hat{q}_{ab}} \frac{\partial \hat{L}}{\partial \hat{q}_{cd}} \right) + \mathbb{E}_{\hat{L}} \left(\frac{\partial^2 \hat{L}}{\partial \hat{q}_{ab} \partial \hat{q}_{cd}} \right) - \mathbb{E}_{\hat{L}} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \hat{q}_{ab}} \right) \mathbb{E}_{\hat{L}} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \hat{q}_{cd}} \right), \quad (180)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \hat{R}_a \partial \hat{R}_b} G_2 = \mathbb{E}_{\hat{L}} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \hat{R}_a} \frac{\partial \hat{L}}{\partial \hat{R}_b} \right) + \mathbb{E}_{\hat{L}} \left(\frac{\partial^2 \hat{L}}{\partial \hat{R}_a \partial \hat{R}_b} \right) - \mathbb{E}_{\hat{L}} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \hat{R}_a} \right) \mathbb{E}_{\hat{L}} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \hat{R}_b} \right), \quad (181)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \hat{q}_{ab} \partial \hat{R}_c} G_2 = \mathbb{E}_{\hat{L}} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \hat{q}_{ab}} \frac{\partial \hat{L}}{\partial \hat{R}_c} \right) + \mathbb{E}_{\hat{L}} \left(\frac{\partial^2 \hat{L}}{\partial \hat{q}_{ab} \partial \hat{R}_c} \right) - \mathbb{E}_{\hat{L}} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \hat{q}_{ab}} \right) \mathbb{E}_{\hat{L}} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \hat{R}_c} \right). \quad (182)$$

ここで

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{L}}{\partial \hat{q}_{ab}} &= s_a s_b, & \frac{\partial \hat{L}}{\partial \hat{R}_a} &= s_a, \\ \frac{\partial \hat{L}}{\partial \hat{q}_{ab} \partial \hat{q}_{cd}} &= 0, & \frac{\partial \hat{L}}{\partial \hat{R}_a \partial \hat{R}_b} &= 0, & \frac{\partial \hat{L}}{\partial \hat{q}_{ab} \partial \hat{R}_c} &= 0 \end{aligned} \quad (183)$$

より、 $\left. \frac{\partial^2}{\partial \hat{q}_{ab} \partial \hat{q}_{cd}} G_2 \right|_{\text{RS}}$, $\left. \frac{\partial^2}{\partial \hat{R}_a \partial \hat{R}_b} G_2 \right|_{\text{RS}}$, $\left. \frac{\partial^2}{\partial \hat{q}_{ab} \partial \hat{R}_c} G_2 \right|_{\text{RS}}$ は

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial \hat{q}_{ab} \partial \hat{q}_{cd}} G_2 \right|_{\text{RS}} = \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}} (s_a s_b s_c s_d) - \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}} (s_a s_b) \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}} (s_c s_d), \quad (184)$$

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial \hat{R}_a \partial \hat{R}_b} G_2 \right|_{\text{RS}} = \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}} (s_a s_b) - \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}} (s_a) \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}} (s_b), \quad (185)$$

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial \hat{q}_{ab} \partial \hat{R}_c} G_2 \right|_{\text{RS}} = \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}} (s_a s_b s_c) - \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}} (s_a s_b) \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}} (s_c) \quad (186)$$

と表せる。

(184) 式の添字 a, b, c, d の取り方は、 $\sum_{a < b} \sum_{c < d}$ より $\frac{n(n-1)}{2} \times \frac{n(n-1)}{2}$ 通りあり、3つのグループに分けられる。

I レプリカ添字が2つ一致する時 ($a = c, b = d$)

1. $\frac{n(n-1)}{2}$ 通り

$$P' \equiv \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}} (s_a^2 s_b^2) - \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}} (s_a s_b)^2 = \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}} (1) - \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}} (s_a s_b)^2. \quad (187)$$

II 1つだけ一致する時 ($a = c$ かつ $b \neq d$ or $a = d$ or $b = c$ or $b = d$ かつ $a \neq c$)

$2(n-2) \cdot \frac{n(n-1)}{2}$ 通り

$$Q' \equiv \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}} (s_a^2 s_b s_c) - \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}} (s_a s_b) \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}} (s_a s_c) = \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}} (s_a s_b) - \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}} (s_a s_b)^2. \quad (188)$$

III 全て異なる時

$\frac{(n-2)(n-3)}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}$ 通り

$$R' \equiv \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}} (s_a s_b s_c s_d) - \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}} (s_a s_b)^2. \quad (189)$$

(185) 式の添字の取り方は、 $\sum_{a, b}$ より $n \times n$ 通りあり、2つのグループに分けられる。

I $a = b$ の時

n 通り

$$A' \equiv \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}} (1) - \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}} (s_a)^2. \quad (190)$$

II $a \neq b$ の時

$n(n-1)$ 通り

$$B' \equiv \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}} (s_a s_b) - \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}} (s_a)^2. \quad (191)$$

(186) 式の添字の取り方は、 $\sum_{a<b} \sum_c$ より $n \frac{n(n-1)}{2}$ 通りあり、2つのグループに分けられる。

I 添字が1つ一致する時 ($a = c$ or $b = c$)

$$2 \frac{n(n-1)}{2} = n(n-1) \text{ 通り}$$

$$C' \equiv \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}}(s_a) - \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}}(s_a s_b) \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}}(s_a). \quad (192)$$

II 全て異なる時

$$(n-2) \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2} n(n-1)(n-2) \text{ 通り}$$

$$D' \equiv \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}}(s_a s_b s_c) - \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}}(s_a s_b) \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}}(s_a). \quad (193)$$

ここで $\mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}}(A)$ を具体的に計算する。

$$J = \sum_s s e^{Zs} = e^Z - e^{-Z} = 2 \sinh Z = 2 \cosh Z \tanh Z$$

を使うと、(93) 式より、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}}(s_a s_b) &= \sum_{s_\gamma} s_a s_b e^{\hat{L}|\text{RS}} \\ &= \sum_{s_\gamma} \int Dz s_a s_b \exp\left((\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R}) \sum_\gamma s_\gamma - \frac{n\hat{q}}{2}\right) \\ &= e^{-\frac{n\hat{q}}{2}} \int Dz \left(\prod_{\gamma \neq a, b} \sum_{s_\gamma} e^{(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R})s_\gamma} \right) \left(\sum_{s_a} s_a e^{(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R})s_a} \right) \left(\sum_{s_b} s_b e^{(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R})s_b} \right) \\ &= e^{-\frac{n\hat{q}}{2}} \int Dz \left(2 \cosh(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R}) \right)^{n-2} 2^2 \cosh^2(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R}) \tanh^2(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R}) \\ &= e^{-\frac{n\hat{q}}{2}} \int Dz \left(2 \cosh(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R}) \right)^n \tanh^2(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R}) \end{aligned} \quad (194)$$

となる。 $n \rightarrow 0$ の極限をとると、

$$\mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}}(s_a s_b) = \int Dz \tanh^2(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R}). \quad (195)$$

同様にして、

$$\mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}}(s_a) = \int Dz \tanh(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R}), \quad (196)$$

$$\mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}}(s_a s_b s_c) = \int Dz \tanh^3(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R}), \quad (197)$$

$$\mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}}(s_a s_b s_c s_d) = \int Dz \tanh^4(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R}). \quad (198)$$

次に G_3 について計算する。(85) 式より、

$$e^{NG_3} = \exp\left(-N \sum_{a<b} \hat{q}_{ab} q_{ab} - N \sum_a \hat{R}_a R_a\right), \quad (199)$$

$$G_3 = - \sum_{a<b} \hat{q}_{ab} q_{ab} - \sum_a \hat{R}_a R_a. \quad (200)$$

G_3 を $\{q_{ab}\}, \{\hat{q}_{ab}\}, \{R_a\}, \{\hat{R}_a\}$ について2階微分する。

$$\frac{\partial G_3}{\partial q_{ab}} = -\hat{q}_{ab}, \quad \frac{\partial G_3}{\partial \hat{q}_{ab}} = -q_{ab}, \quad \frac{\partial G_3}{\partial R_a} = -\hat{R}_a, \quad \frac{\partial G_3}{\partial \hat{R}_a} = -R_a,$$

$$\frac{\partial^2 G_3}{\partial q_{ab} \partial q_{cd}} = -\delta_{a,c} \delta_{b,d}, \quad \frac{\partial G_3}{\partial R_a \partial \hat{R}_b} = -\delta_{a,b}. \quad (201)$$

それ以外の 2 階微分は全て 0 となる。したがって、

$$dG_3 = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} = -E. \quad (202)$$

ヘシアン G は全部で $\frac{n(n+1)}{2}$ 個の固有ベクトルを持ち、それらは 3 種類に分けられる。以下では、それぞれの固有ベクトルの場合について G から導出されるレプリカ対称解の安定条件を調べる。

(I) 全てのレプリカの添字が対称な場合、 $\epsilon_{ab} = a$, $\gamma_a = b$, $\hat{\epsilon}_{ab} = \hat{a}$, $\hat{\gamma}_a = \hat{b}$ を考える。

このような固有ベクトルを $\omega_1 \equiv (\{a\} \{b\} \{\hat{a}\} \{\hat{b}\})^T$ とする。また、 $\omega_1^T = (v_1 \ \hat{v}_1)$, $v_1^T = (\{a\} \{b\})$, $\hat{v}_1^T = (\{\hat{a}\} \{\hat{b}\})$ とおく。

ここで $dG_1 v_1$ を考えると、第 $\frac{n(n-1)}{2}$ 行目までは次式のようになる。

$$\left(P + 2(n-2)Q + \frac{(n-2)(n-3)}{2}R \right) a + (2C + (n-2)D) b. \quad (203)$$

第 $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ 行目からは次式のようになる。

$$\left((n-1)C + \frac{(n-1)(n-2)}{2}D \right) a + (A + (n-1)B) b. \quad (204)$$

$dG_2 \hat{v}_1$ を考える。この時、第 $\frac{n(n-1)}{2}$ 行目までは次式のようになる。

$$\left(P' + 2(n-2)Q' + \frac{(n-2)(n-3)}{2}R' \right) \hat{a} + (2C' + (n-2)D') \hat{b}. \quad (205)$$

第 $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ 行目からは次式のようになる。

$$\left((n-1)C' + \frac{(n-1)(n-2)}{2}D' \right) \hat{a} + (A' + (n-1)B') \hat{b}. \quad (206)$$

v_1 , \hat{v}_1 は、 $\frac{n(n+1)}{2}$ 行 2 列の次のような行列

$$dU_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (207)$$

を考えると、

$$v_1 = dU_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \hat{v}_1 = dU_1 \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} \quad (208)$$

と表せる。行列 U_1 を次のように定義する。

$$U_1 = \begin{pmatrix} dU_1 & 0 \\ 0 & dU_1 \end{pmatrix}. \quad (209)$$

(203), (204), (205), (206) より、 $U_1^T G U_1$ は

$$U_1^T G U_1 = \begin{pmatrix} \alpha(H_1) & -E \\ -E & \hat{H}_1 \end{pmatrix}, \quad (210)$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} P + 2(n-2)Q + \frac{(n-2)(n-3)}{2}R & 2C + (n-2)D \\ (n-1)C + \frac{(n-1)(n-2)}{2}D & A + (n-1)B \end{pmatrix}, \quad (211)$$

$$\hat{H}_1 = \begin{pmatrix} P' + 2(n-2)Q' + \frac{(n-2)(n-3)}{2}R' & 2C' + (n-2)D' \\ (n-1)C' + \frac{(n-1)(n-2)}{2}D' & A' + (n-1)B' \end{pmatrix} \quad (212)$$

となる。 $n \rightarrow 0$ で

$$H_1 = \begin{pmatrix} P + 4Q + 3R & 2(C - D) \\ -(C - D) & A - B \end{pmatrix}, \quad (213)$$

$$\hat{H}_1 = \begin{pmatrix} P' + 4Q' + 3R' & 2(C' - D') \\ -(C' - D') & A' - B' \end{pmatrix}. \quad (214)$$

ここで、 $A - B$ は、 (143), (144), (154), (155), (156), (157), (158), (171), (172) 式より、

$$\begin{aligned} A - B &= \{\mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_0^2 \hat{u}_a^2) - \mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_0 \hat{u}_a)^2\} - \{\mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_0^2 \hat{u}_a \hat{u}_b) - \mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_0 \hat{u}_a)^2\} \\ &= \mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_0^2 \hat{u}_a^2) - \mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_0^2 \hat{u}_a \hat{u}_b) \\ &= \mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_a^4 - \hat{u}_a^2 \hat{u}_b^2 - 2\hat{u}_a^3 \hat{u}_b + 2\hat{u}_a^2 \hat{u}_b \hat{u}_c) \\ &\quad - \mathbb{E}_{L|RS}(2\hat{u}_a^3 \hat{u}_b + 2\hat{u}_a^2 \hat{u}_b^2 - 10\hat{u}_a^2 \hat{u}_b \hat{u}_d + 6\hat{u}_a \hat{u}_b \hat{u}_c \hat{u}_d) \\ &= \mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_a^4 - 3\hat{u}_a^2 \hat{u}_b^2 - 4\hat{u}_a^3 \hat{u}_b + 12\hat{u}_a^2 \hat{u}_b \hat{u}_c - 6\hat{u}_a \hat{u}_b \hat{u}_c \hat{u}_d) \\ &= \int DtDz \frac{1}{V^4} \{(W^4 + 6W^2V + 3V^2) - 3(W^2 + V)^2 - 4W(W^3 + 3VW) \\ &\quad + 12W^2(W^2 + V) - 6W^4\} = 0. \end{aligned} \quad (215)$$

$C - D$ は、 (145), (146), (154), (155), (156), (158), (173), (174) 式より、

$$\begin{aligned} C - D &= \{\mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_0 \hat{u}_a^2 \hat{u}_b) - \mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_0 \hat{u}_a) \mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_a \hat{u}_b)\} \\ &\quad - \{\mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_0 \hat{u}_a \hat{u}_b \hat{u}_c) - \mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_0 \hat{u}_a) \mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_b \hat{u}_c)\} \\ &= \mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_0 \hat{u}_a^2 \hat{u}_b) - \mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_0 \hat{u}_a \hat{u}_b \hat{u}_c) \\ &= -\mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_a^3 \hat{u}_b + \hat{u}_a^2 \hat{u}_b^2 - 2\hat{u}_a^2 \hat{u}_b \hat{u}_c) + \mathbb{E}_{L|RS}(3\hat{u}_a^2 \hat{u}_b \hat{u}_c - 3\hat{u}_a \hat{u}_b \hat{u}_c \hat{u}_d) \\ &= \mathbb{E}_{L|RS}(-\hat{u}_a^3 \hat{u}_b - \hat{u}_a^2 \hat{u}_b^2 + 5\hat{u}_a^2 \hat{u}_b \hat{u}_c - 3\hat{u}_a \hat{u}_b \hat{u}_c \hat{u}_d) \\ &= \int DtDz \frac{1}{V^4} \{-W(W^3 + 3VW) - (W^2 + V)^2 + 5W^2(W^2 + V) - 3W^4\} \\ &= -\frac{1}{V^2} = -\frac{\beta^2}{[1 + \beta(1 - q)]^2}. \end{aligned} \quad (216)$$

$P - 4Q + 3R$ は、 (140), (141), (142), (154), (155), (156), (159) 式より、

$$\begin{aligned} P - 4Q + 3R &= \{\mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_a^2 \hat{u}_b^2) - \mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_a \hat{u}_b)^2\} - 4\{\mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_a^2 \hat{u}_b \hat{u}_c) - \mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_a \hat{u}_b)^2\} \\ &\quad + 3\{\mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_a \hat{u}_b \hat{u}_c \hat{u}_d) - \mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_a \hat{u}_b)^2\} \\ &= \mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_a^2 \hat{u}_b^2) - 4\mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_a^2 \hat{u}_b \hat{u}_c) + 3\mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_a \hat{u}_b \hat{u}_c \hat{u}_d) \\ &= \int DtDz \frac{1}{V^4} \{(W^2 + V)^2 - 4W^2(W^2 + V) + 3W^4\} \\ &= \frac{1}{V^2} - \frac{2}{V^3} \int DtDz W^2 \\ &= \frac{1}{V^2} \left(1 + \frac{2}{V}(w_t^2 + w_z^2)\right) \\ &= \frac{\beta^2}{[1 + \beta(1 - q)]^2} \left\{1 + \frac{2\beta}{1 + \beta(1 - q)}(1 + q - 2R + \beta_0^{-1})\right\}. \end{aligned} \quad (217)$$

また、 $A' - B'$ は (190), (191), (195) 式より

$$\begin{aligned}
A' - B' &= \left\{ \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}}(1) - \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}}(s_a)^2 \right\} - \left\{ \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}}(s_a s_b) - \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}}(s_a)^2 \right\} \\
&= 1 - \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}}(s_a s_b) \\
&= 1 - \int Dz \tanh^2(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R}).
\end{aligned} \tag{218}$$

$C' - D'$ は (192), (193), (196), (197) 式より

$$\begin{aligned}
C' - D' &= \left\{ \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}}(s_a) - \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}}(s_a s_b) \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}}(s_a) \right\} \\
&\quad - \left\{ \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}}(s_a s_b s_c) - \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}}(s_a s_b) \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}}(s_a) \right\} \\
&= \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}}(s_a) - \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}}(s_a s_b s_c) \\
&= \int Dz \tanh(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R}) - \int Dz \tanh^3(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R}).
\end{aligned} \tag{219}$$

$P' - 4Q' + 3R'$ は (187), (188), (189), (195), (198) 式より

$$\begin{aligned}
P' - 4Q' + 3R' &= \left\{ \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}}(1) - \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}}(s_a s_b)^2 \right\} - 4 \left\{ \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}}(s_a s_b) - \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}}(s_a s_b)^2 \right\} \\
&\quad + 3 \left\{ \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}}(s_a s_b s_c s_d) - \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}}(s_a s_b)^2 \right\} \\
&= 1 - 4 \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}}(s_a s_b) + 3 \mathbb{E}_{\hat{L}|\text{RS}}(s_a s_b s_c s_d) \\
&= 1 - 4 \int Dz \tanh^2(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R}) + 3 \int Dz \tanh^4(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R}).
\end{aligned} \tag{220}$$

固有ベクトル ω_1 でのレプリカ対称解の安定条件は、自由エネルギーが \hat{v}_1 で最大、そのとき v_1 については最小より $|\hat{H}_1| > 0$ かつ $|U_1^T G U_1| < 0$ である。ところで、固有ベクトル ω_1 は縦方向のモードを表しており、 ω_1 の微小変位に対して、レプリカ対称性は保たれる。したがって、このモードの安定条件からは、レプリカ対称性が安定であることのみが保証される。

- (II) 1つのレプリカ θ を特別扱いする場合 $\epsilon_{\theta b} = a'$, $\epsilon_{ab} = b'$, $\gamma_\theta = c'$, $\gamma_a = d'$, $\hat{\epsilon}_{\theta b} = \hat{a}'$, $\hat{\epsilon}_{ab} = \hat{b}'$, $\hat{\gamma}_\theta = \hat{c}'$, $\hat{\gamma}_a = \hat{d}'$; $a \neq \theta$ を考える。

このような固有ベクトルを ω_2 とする。

ω_1 と ω_2 は直交するので次の直交条件を満たす。

$$\begin{aligned}
&(n-1)aa' + \frac{(n-1)(n-2)}{2}ab' + bc' + (n-1)bd' \\
&= (n-1) \left(a' + \frac{n-2}{2}b' \right) a + (c' + (n-1)d') b = 0,
\end{aligned} \tag{221}$$

$$\begin{aligned}
&(n-1)\hat{a}\hat{a}' + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\hat{a}\hat{b}' + \hat{b}\hat{c}' + (n-1)\hat{b}\hat{d}' \\
&= (n-1) \left(\hat{a}' + \frac{n-2}{2}\hat{b}' \right) \hat{a} + (\hat{c}' + (n-1)\hat{d}') \hat{b} = 0.
\end{aligned} \tag{222}$$

任意の a, b, \hat{a}, \hat{b} について (221), (222) 式の等号がなりたつための条件は

$$a' + \frac{n-2}{2}b' = 0, \quad c' + (n-1)d' = 0. \tag{223}$$

$$\hat{a}' + \frac{n-2}{2}\hat{b}' = 0, \quad \hat{c}' + (n-1)\hat{d}' = 0. \tag{224}$$

$\omega_2^T = (v_2 \hat{v}_2)$ とおく。

$$v_2 = dU_2 \begin{pmatrix} a' \\ c' \end{pmatrix}, \quad \hat{v}_2 = dU_3 \begin{pmatrix} \hat{a}' \\ \hat{c}' \end{pmatrix} \tag{225}$$

を満たす dU_2 を用いて行列 U_2 を

$$U_2 = \begin{pmatrix} dU_2 & 0 \\ 0 & dU_2 \end{pmatrix} \quad (226)$$

と表す。

$n \rightarrow 0$ では $a' = b'$, $c' = d'$, $\hat{a}' = \hat{b}'$, $\hat{c}' = \hat{d}'$ となるので、このとき $U_2^T G U_2$ は

$$\begin{aligned} U_2^T G U_2 &= \begin{pmatrix} \alpha(P+4Q+3R) & \alpha(2(C-D)) & -1 & 0 \\ \alpha(-(C-D)) & \alpha(A-B) & 0 & -1 \\ -1 & 0 & P'-4Q'+3R' & 2(C'-D') \\ 0 & -1 & -(C'-D') & A'-B' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha H_1 & -E \\ -E & \hat{H}_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (227)$$

となり、(I) と同じ安定条件が得られる。

ω_2 はレプリカの添字の選び方は全部で n 通りある。一方、 ω_1 は ω_2 の n 個のベクトルの和の形式で表される。行列 H_1 , \hat{H}_1 の固有空間は 2 次元なので、固有ベクトル ω_1 , ω_2 を合わせると、 $2n$ 個の独立な固有ベクトルが得られたことになる。

(III) 2つのレプリカ θ , ν を特別扱いする場合、

$$\begin{aligned} \epsilon_{\theta\nu} &= a'' \quad (1 \text{ 個}), \\ \epsilon_{\theta b} = \epsilon_{a\theta} = \epsilon_{\nu b} = \epsilon_{a\nu} &= b'' ; a \neq \theta, \nu, b \neq \theta, \nu \quad (2(n-2) \text{ 個}), \\ \epsilon_{ab} &= c'' ; a, b \neq \theta, \nu \quad (\frac{1}{2}(n-2)(n-3) \text{ 個}), \\ \gamma_{\theta} = \gamma_{\nu} &= d'' \quad (2 \text{ 個}), \\ \gamma_a &= e'' ; a \neq \theta, \nu \quad ((n-2) \text{ 個}), \\ \hat{\epsilon}_{\theta\nu} &= \hat{a}'' \quad (1 \text{ 個}), \\ \hat{\epsilon}_{\theta b} = \hat{\epsilon}_{a\theta} = \hat{\epsilon}_{\nu b} = \hat{\epsilon}_{a\nu} &= \hat{b}'' ; a \neq \theta, \nu, b \neq \theta, \nu \quad (2(n-2) \text{ 個}), \\ \hat{\epsilon}_{ab} &= \hat{c}'' ; a, b \neq \theta, \nu \quad (\frac{1}{2}(n-2)(n-3) \text{ 個}), \\ \hat{\gamma}_{\theta} = \hat{\gamma}_{\nu} &= \hat{d}'' \quad (2 \text{ 個}), \\ \hat{\gamma}_a &= \hat{e}'' ; a \neq \theta, \nu \quad ((n-2) \text{ 個}) \end{aligned}$$

を考える。

このような固有ベクトルを ω_3 とする。レプリカの添字の選び方は、全部で $\frac{n(n-1)}{2}$ 通りあるが、 $\frac{n(n-1)}{2}$ 個のベクトルのうち n 個は、線形従属なので、独立な固有ベクトルの数は $\frac{n(n-3)}{2}$ 個である。したがって、 ω_1 , ω_2 , ω_3 を合わせると独立な固有ベクトルの数は $\frac{n(n+1)}{2}$ 個となるので、全ての場合の固有ベクトルを考えたことになる。

ω_3 は ω_1 , ω_2 と直交するので、次の直交条件を満たす。

$$\begin{aligned} \left\{ a'' + 2(n-2)b'' + \frac{1}{2}(n-2)(n-3)c'' \right\} a + \{ 2d'' + (n-2)e'' \} b &= 0, \\ \left\{ a'' + (n-2)b'' \right\} a' + \left\{ (n-2)b'' + \frac{1}{2}(n-2)(n-3)c'' \right\} b' \\ + d''c' + \{ d'' + (n-2)e'' \} d' &= 0, \\ \left\{ \hat{a}'' + 2(n-2)\hat{b}'' + \frac{1}{2}(n-2)(n-3)\hat{c}'' \right\} \hat{a} + \{ 2\hat{d}'' + (n-2)\hat{e}'' \} \hat{b} &= 0, \\ \left\{ \hat{a}'' + (n-2)\hat{b}'' \right\} \hat{a}' + \left\{ (n-2)\hat{b}'' + \frac{1}{2}(n-2)(n-3)\hat{c}'' \right\} \hat{b}' \\ + \hat{d}''\hat{c}' + \{ \hat{d}'' + (n-2)\hat{e}'' \} \hat{d}' &= 0. \end{aligned} \quad (228)$$

これより、

$$a'' = \frac{1}{2}(3-n)(2-n)c'', \quad b'' = \frac{1}{2}(3-n)c'', \quad d'' = e'' = 0,$$

$$\hat{a}'' = \frac{1}{2}(3-n)(2-n)\hat{c}'', \quad \hat{b}'' = \frac{1}{2}(3-n)\hat{c}'', \quad \hat{d}'' = \hat{e}'' = 0. \quad (229)$$

$\omega_3^T = (\mathbf{v}_3 \ \hat{\mathbf{v}}_3)$ とおく。

$$\mathbf{v}_3 = dU_3 \mathbf{c}'', \quad \hat{\mathbf{v}}_3 = dU_3 \hat{\mathbf{c}}'' \quad (230)$$

を満たす dU_3 を用いて行列 U_3 を

$$U_3 = \begin{pmatrix} dU_3 & 0 \\ 0 & dU_3 \end{pmatrix} \quad (231)$$

と表すと、このとき $U_3^T G U_3$ は $n \rightarrow 0$ で

$$U_3^T G U_3 = \begin{pmatrix} \alpha(P+2Q+R) & -1 \\ -1 & P'-2Q'+R' \end{pmatrix} \quad (232)$$

となる。

固有ベクトル ω_3 はレプリコンモードと呼ばれる。レプリコンモードでのレプリカ対称解の安定条件は

$$P' - 2Q' + R' > 0, \quad (233)$$

$$\alpha(P+2Q+R) - (P' - 2Q' + R')^{-1} < 0 \quad (234)$$

である。

$P - 2Q + R$ は (140), (141), (142), (153), (154), (155), (156) 式より、

$$\begin{aligned} P - 2Q + R &= \{ \mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_a^2 \hat{u}_b^2) - \mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_a \hat{u}_b)^2 \} - 2 \{ \mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_a^2 \hat{u}_b \hat{u}_c) - \mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_a \hat{u}_b)^2 \} \\ &\quad + \{ \mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_a \hat{u}_b \hat{u}_c \hat{u}_d) - \mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_a \hat{u}_b)^2 \} \\ &= \mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_a^2 \hat{u}_b^2) - 2 \mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_a^2 \hat{u}_b \hat{u}_c) + \mathbb{E}_{L|RS}(\hat{u}_a \hat{u}_b \hat{u}_c \hat{u}_d) \\ &= \int Dt Dz \frac{1}{V^4} \{ (W^2 + V)^2 - 2W^2(W^2 + V) + W^4 \} \\ &= \frac{1}{V^2} = \frac{\beta^2}{(1 + \beta(1 - q))^2}. \end{aligned} \quad (235)$$

$P' - 2Q' + R'$ は (187), (188), (189), (195), (198) 式より

$$\begin{aligned} P' - 2Q' + R' &= \left\{ \mathbb{E}_{\hat{L}|RS}(1) - \mathbb{E}_{\hat{L}|RS}(s_a s_b)^2 \right\} - 2 \left\{ \mathbb{E}_{\hat{L}|RS}(s_a s_b) - \mathbb{E}_{\hat{L}|RS}(s_a s_b)^2 \right\} \\ &\quad + \left\{ \mathbb{E}_{\hat{L}|RS}(s_a s_b s_c s_d) - \mathbb{E}_{\hat{L}|RS}(s_a s_b)^2 \right\} \\ &= 1 - 2 \mathbb{E}_{\hat{L}|RS}(s_a s_b) + \mathbb{E}_{\hat{L}|RS}(s_a s_b s_c s_d) \\ &= 1 - 2 \int Dz \tanh^2(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R}) + \int Dz \tanh^4(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R}) \\ &= \int Dz \left(1 - \tanh^2(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R}) \right)^2 = \int Dz \operatorname{sech}^4(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R}) > 0. \end{aligned} \quad (236)$$

(236) 式より、(233) は常に満たされる。(234) は

$$\frac{\alpha\beta^2}{(1 + \beta(1 - q))^2} - \left(\int Dz \operatorname{sech}^4(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R}) \right)^{-1} < 0. \quad (237)$$

ゆえに、レプリコンモードにおけるレプリカ対称解の安定条件は

$$\frac{\alpha\beta^2}{(1 + \beta(1 - q))^2} \int Dz \operatorname{sech}^4(\sqrt{\hat{q}}z + \hat{R}) - 1 < 0 \quad (238)$$

である。これが、レプリカ対称解における AT 安定性の条件である。

付録 D case 1 の 1RSB 解

q_{ab}, \hat{q}_{ab} を $n \times n$ の行列の要素とみなす。レプリカ対称解は対角成分以外は同じ値を持つから、例えば $n = 6$ とすると次のように表される。

$$\{q_{ab}\} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & q & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \{\hat{q}_{ab}\} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & \hat{q} & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}. \quad (239)$$

1 ステップレプリカ対称性破れの解 (1RSB 解) は、正の $m (\leq n)$ を導入して、 n 個のレプリカを $\frac{n}{m}$ 個のブロックに分割し、非対角ブロックに q_0, \hat{q}_0 、対角ブロックに q_1, \hat{q}_1 を割り当てる。対角要素は 0 である。 $n = 6, m = 3$ の場合は次のように表される。

$$\{q_{ab}\} = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & q_1 & & & \\ q_1 & 0 & q_1 & & & \\ q_1 & q_1 & 0 & & & \\ & & & 0 & q_1 & q_1 \\ & & & q_0 & q_1 & q_1 \\ & & & q_1 & q_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \{\hat{q}_{ab}\} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{q}_1 & \hat{q}_1 & & & \\ \hat{q}_1 & 0 & \hat{q}_1 & & & \\ \hat{q}_1 & \hat{q}_1 & 0 & & & \\ & & & 0 & \hat{q}_1 & \hat{q}_1 \\ & & & \hat{q}_0 & \hat{q}_1 & \hat{q}_1 \\ & & & \hat{q}_1 & \hat{q}_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (240)$$

1 ステップレプリカ対称性の破れを仮定した場合の自由エネルギー $f_{1\text{RSB}}$ を導出する。まず、 G_1^{1RSB} を計算する。(87) 式より

$$e^{\frac{G_1}{\alpha}} = \int Dt \int \left\{ \prod_a \frac{d\hat{u}_a}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{\beta}} \exp \left(-\frac{1}{2} \hat{u}_a^2 + \frac{\beta}{2} \frac{1 + \beta_0}{\beta_0} t^2 - \frac{\hat{u}_a^2}{2\beta} + i \sqrt{\frac{1 + \beta_0}{\beta_0}} t \hat{u}_a \right) \right\} \\ \times \exp \left(-\sum_{a < b} q_{ab} \hat{u}_a \hat{u}_b - \frac{\beta}{2} n \left(\sum_a R_a \hat{u}_a \right)^2 - in\beta \sqrt{\frac{1 + \beta_0}{\beta_0}} t \sum_a R_a \hat{u}_a + \sum_{a,b} R_b \hat{u}_a \hat{u}_b \right).$$

ここで、1 ステップレプリカ対称性破れを仮定する。 $l_1 = 1, \dots, \frac{n}{m}$ はブロック番号を表し、 $l_2 = 1, \dots, m$ はブロック内の列番号を表すとする。この時、 $q_{ab} = q_{(l_1, l_2)(l'_1, l'_2)}$ より、(87) 式中の $\sum_{a < b} q_{ab} \hat{u}_a \hat{u}_b$ は、

$$\sum_{a < b} q_{ab} \hat{u}_a \hat{u}_b = \frac{q_0}{2} \sum_{a,b} \hat{u}_a \hat{u}_b + \frac{q_1 - q_0}{2} \sum_{l_1=1}^{\frac{n}{m}} \sum_{l_2=1}^m \sum_{l'_2=1}^m \hat{u}_{l_1 l_2} \hat{u}_{l_1 l'_2} - \frac{q_1}{2} \sum_a \hat{u}_a^2 \\ = \frac{q_0}{2} \left(\sum_a \hat{u}_a \right)^2 + \frac{q_1 - q_0}{2} \sum_{l_1=1}^{\frac{n}{m}} \left(\sum_{l_2=1}^m \hat{u}_{l_1 l_2} \right)^2 - \frac{q_1}{2} \sum_a \hat{u}_a^2 \quad (241)$$

と表される。したがって、 $e^{\frac{G_1^{\text{1RSB}}}{\alpha}}$ は

$$e^{\frac{G_1^{\text{1RSB}}}{\alpha}} = \int Dt \int \left\{ \prod_a \frac{d\hat{u}_a}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{\beta}} \exp \left(-\frac{1}{2} \hat{u}_a^2 + \frac{\beta}{2} \frac{1 + \beta_0}{\beta_0} t^2 - \frac{\hat{u}_a^2}{2\beta} + i \sqrt{\frac{1 + \beta_0}{\beta_0}} t \hat{u}_a \right) \right\} \\ \times \exp \left(-\frac{q_0}{2} \left(\sum_a \hat{u}_a \right)^2 - \frac{q_1 - q_0}{2} \sum_{l_1=1}^{\frac{n}{m}} \left(\sum_{l_2=1}^m \hat{u}_{l_1 l_2} \right)^2 + \frac{q_1}{2} \sum_a \hat{u}_a^2 - \frac{\beta}{2} n R^2 \left(\sum_a \hat{u}_a \right)^2 \right. \\ \left. - in\beta \sqrt{\frac{1 + \beta_0}{\beta_0}} t R \sum_a \hat{u}_a + R \left(\sum_a \hat{u}_a \right)^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \int Dt \exp\left(n \frac{\beta}{2} \frac{1 + \beta_0}{\beta_0} t^2\right) \\
&\quad \times \int \left\{ \prod_a \frac{d\hat{u}_a}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{\beta}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(1 - q_1 + \frac{1}{\beta}\right) \hat{u}_a^2 + i \sqrt{\frac{1 + \beta_0}{\beta_0}} t \hat{u}_a - in\beta \sqrt{\frac{1 + \beta_0}{\beta_0}} t R \hat{u}_a\right) \right\} \\
&\quad \times \exp\left(\frac{1}{2} (-q_0 - \beta n R^2 + 2R) \left(\sum_a \hat{u}_a\right)^2\right) \times \exp\left(-\frac{q_1 - q_0}{2} \sum_{l_1=1}^{\frac{n}{m}} \left(\sum_{l_2=1}^m \hat{u}_{l_1 l_2}\right)^2\right)
\end{aligned} \tag{242}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{1}{2} (-q_0 - \beta n R^2 + 2R) \left(\sum_a \hat{u}_a\right)^2\right) &= \int Dz \exp\left(i \sqrt{q_0 - 2R + n\beta R^2} z \sum_a \hat{u}_a\right), \\
\exp\left(-\frac{q_1 - q_0}{2} \sum_{l_1=1}^{\frac{n}{m}} \left(\sum_{l_2=1}^m \hat{u}_{l_1 l_2}\right)^2\right) &= \prod_{l_1=1}^{\frac{n}{m}} \int Dt_{l_1} \exp\left(\sqrt{-(q_1 - q_0)} \left(\sum_{l_2=1}^m \hat{u}_{l_1 l_2}\right) t_{l_1}\right)
\end{aligned}$$

を用いて、(242) 式を整理すると、

$$\begin{aligned}
e^{\frac{G_1^{\text{RSB}}}{\alpha}} &= \int Dt \int Dz \left(\frac{1}{1 + \beta(1 - q_1)}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(n \frac{\beta}{2} \frac{1 + \beta_0}{\beta_0} t^2\right) \\
&\quad \times \prod_{l_1=1}^{\frac{n}{m}} \int Dt_{l_1} \exp\left(-\frac{m(q_1 - q_0)}{2(1 + q_1 + \frac{1}{\beta})} (t_{l_1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{q_1 - q_0}} \left\{ \sqrt{\frac{1 + \beta_0}{\beta_0}} t(1 - n\beta R) + \sqrt{q_0 - 2R + n\beta R^2} z \right\})^2\right)
\end{aligned} \tag{243}$$

となる。

$$\begin{aligned}
B &\equiv \frac{m(q_1 - q_0)}{1 - q_1 + \frac{1}{\beta}}, \\
C &\equiv \frac{1}{\sqrt{q_1 - q_0}} \left\{ \sqrt{\frac{1 + \beta_0}{\beta_0}} (1 - n\beta R)t + \sqrt{q_0 - 2R + n\beta R^2} z \right\} = \frac{1}{\sqrt{q_1 - q_0}} \{C_t t + C_z z\}
\end{aligned}$$

とおくと、

$$\begin{aligned}
e^{\frac{G_1^{\text{RSB}}}{\alpha}} &= \int Dt \int Dz \left(\frac{1}{1 + \beta(1 - q_1)}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(n \frac{\beta}{2} \frac{1 + \beta_0}{\beta_0} t^2\right) \prod_{l_1=1}^{\frac{n}{m}} \int Dt_{l_1} \exp\left(-\frac{B}{2} (t_{l_1} + C)^2\right) \\
&= \int Dt \int Dz \left(\frac{1}{1 + \beta(1 - q_1)}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{1 + B}\right)^{\frac{n}{2m}} \\
&\quad \times \exp\left(n \left\{ \frac{\beta}{2} \frac{1 + \beta_0}{\beta_0} t^2 - \frac{B}{2m(B + 1)} \frac{(C_t t + C_z z)^2}{q_1 - q_0} \right\}\right).
\end{aligned}$$

$n \ll 1$ より

$$\begin{aligned}
e^{\frac{G_1^{\text{RSB}}}{\alpha}} &\sim \int Dt \int Dz \left(\frac{1}{1 + \beta(1 - q_1)}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{1 + B}\right)^{\frac{n}{2m}} \\
&\quad \times \left(1 + \left(n \left\{ \frac{\beta}{2} \frac{1 + \beta_0}{\beta_0} t^2 - \frac{B}{2m(B + 1)} \frac{(C_t t + C_z z)^2}{q_1 - q_0} \right\}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{1 + \beta(1 - q_1)} \right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{1 + B} \right)^{\frac{n}{2m}} \left(1 + n \frac{\beta}{2} \frac{1 + \beta_0}{\beta_0} - \frac{nB}{2m(B+1)} \frac{C_t^2 + C_z^2}{q_1 - q_0} \right) \\
&\sim \left(\frac{1}{1 + \beta(1 - q_1)} \right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{1 + B} \right)^{\frac{n}{2m}} \exp \left(\frac{n}{2} \frac{\beta}{\beta_0} (1 + \beta_0) - \frac{nB}{2m(B+1)} \frac{C_t^2 + C_z^2}{q_1 - q_0} \right). \quad (244)
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{G_1^{\text{1RSB}}}{\alpha} = -\frac{n}{2} \log(1 + \beta(1 - q_1)) - \frac{n}{2m} \log(1 + B) + \frac{n}{2} \frac{\beta}{\beta_0} (1 + \beta_0) - \frac{nB}{2m(B+1)} \frac{C_t^2 + C_z^2}{q_1 - q_0}. \quad (245)$$

$n \rightarrow 0$ で、

$$\begin{aligned}
C_t &= \sqrt{\frac{1 + \beta_0}{\beta_0}} (1 - n\beta R) \rightarrow \sqrt{\frac{1 + \beta_0}{\beta_0}}, \\
C_z &= \sqrt{q_0 - 2R + n\beta R^2} \rightarrow \sqrt{q_0 - 2R}
\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow 0} \frac{G_1^{\text{1RSB}}}{n} &= \alpha \left(-\frac{1}{2} \log(1 + \beta(1 - q_1)) - \frac{1}{2m} \log \left(1 + \frac{m\beta(q_1 - q_0)}{1 + \beta(1 - q_1)} \right) + \frac{1}{2} \frac{\beta}{\beta_0} (1 + \beta_0) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\beta(1 + \beta_0^{-1} + q_0 - 2R)}{2(1 + \beta(1 - q_1) + m\beta(q_1 - q_0))} \right). \quad (246)
\end{aligned}$$

次に、 G_2^{1RSB} を計算する。(84) 式より、

$$e^{NG_2} = \left\{ \sum_{s_a} \exp \left(\sum_{a < b} \hat{q}_{ab} s_a s_b + \sum_a \hat{R}_a s_a \right) \right\}^N.$$

1 ステップレプリカ対称性破れを仮定すると、

$$\begin{aligned}
e^{NG_2^{\text{1RSB}}} &= \left\{ \sum_{s_a} \exp \left(\frac{\hat{q}_0}{2} \left(\sum_a s_a \right)^2 + \frac{\hat{q}_1 - \hat{q}_0}{2} \sum_{l_1=1}^{\frac{n}{m}} \left(\sum_{l_2=1}^m s_{l_1 l_2} \right)^2 - \frac{\hat{q}_1}{2} \sum_a s_a + \hat{R} \sum_a s_a \right) \right\}^N \\
&= \left\{ \sum_{s_a} \int Dz \exp \left(\sqrt{\hat{q}_0} z \sum_a s_a + \hat{R} \sum_a s_a - \frac{n}{2} \hat{q}_1 \right) \right. \\
&\quad \left. \times \int \left[\prod_{l_1=1}^{\frac{n}{m}} Dt_{l_1} \exp \left(\sqrt{\hat{q}_1 - \hat{q}_0} t_{l_1} \sum_{l_2=1}^m s_{l_1 l_2} \right) \right] \right\}^N \\
&= \left\{ \exp \left(-\frac{n}{2} \hat{q}_1 \right) \int Dz \int \left[\prod_{l_1=1}^{\frac{n}{m}} Dt_{l_1} \right] \right. \\
&\quad \left. \times \prod_{l_1 l_2} \left[\sum_{s_{l_1 l_2}} \exp \left((\sqrt{\hat{q}_0} z + \hat{R} + \sqrt{\hat{q}_1 - \hat{q}_0} t_{l_1}) s_{l_1 l_2} \right) \right] \right\}^N \\
&= \left\{ \exp \left(-\frac{n}{2} \hat{q}_1 \right) \int Dz \int \left[\prod_{l_1=1}^{\frac{n}{m}} Dt_{l_1} \left\{ 2 \cosh \left(\sqrt{\hat{q}_0} z + \hat{R} + \sqrt{\hat{q}_1 - \hat{q}_0} t_{l_1} \right) \right\}^m \right] \right\}^N \\
&= \left\{ \exp \left(-\frac{n}{2} \hat{q}_1 \right) \int Dz \left(\int Dt \left\{ 2 \cosh \left(\sqrt{\hat{q}_0} z + \hat{R} + \sqrt{\hat{q}_1 - \hat{q}_0} t \right) \right\}^m \right)^{\frac{n}{m}} \right\}^N. \quad (247)
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{G_2^{1\text{RSB}}}{n} = -\frac{\hat{q}_1}{2} + \frac{1}{m} \int Dz \log \left(\int Dt \left\{ 2 \cosh \left(\sqrt{\hat{q}_0} z + \hat{R} + \sqrt{\hat{q}_1 - \hat{q}_0 t} \right) \right\}^m \right). \quad (248)$$

最後に $G_3^{1\text{RSB}}$ を計算する。(85) 式より、

$$G_3 = - \sum_{a < b} \hat{q}_{ab} q_{ab} - \sum_a \hat{R}_a R_a.$$

1 ステップレプリカ対称性破れを仮定すると、

$$\begin{aligned} G_3^{1\text{RSB}} &= - \left(\frac{q_0 \hat{q}_0}{2} \sum_{a,b} + \frac{q_1 \hat{q}_1 - q_0 \hat{q}_0}{2} \sum_{l_1=1}^{\frac{n}{m}} \left(\sum_{l_2=1}^m \right)^2 - \frac{q_1 \hat{q}_1}{2} \sum_a \right) - \hat{R} R \sum_a \\ &= -\frac{n}{2} (q_0 \hat{q}_0 n + (q_1 \hat{q}_1 - q_0 \hat{q}_0) m - q_1 \hat{q}_1) - n R \hat{R}. \end{aligned} \quad (249)$$

ゆえに

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{G_3^{1\text{RSB}}}{n} = \frac{1}{2} (1 - m) q_1 \hat{q}_1 + \frac{m}{2} q_0 \hat{q}_0 - R \hat{R}. \quad (250)$$

(246), (248), (250) 式より 1RSB を仮定したときの自由エネルギーは次のように表せる。

$$\begin{aligned} -\beta f_{1\text{RSB}} &= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{G_1 + G_2 + G_3}{n} \\ &= \alpha \left(-\frac{1}{2} \log(1 + \beta(1 - q_1)) - \frac{1}{2m} \log \left(1 + \frac{m\beta(q_1 - q_0)}{1 + \beta(1 - q_1)} \right) + \frac{1}{2} \frac{\beta}{\beta_0} (1 + \beta_0) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta(1 + \beta_0^{-1} + q_0 - 2R)}{2(1 + \beta(1 - q_1) + m\beta(q_1 - q_0))} \right) \\ &\quad - \frac{\hat{q}_1}{2} + \frac{1}{m} \int Dz \log \left(\int Dt \left\{ 2 \cosh \left(\sqrt{\hat{q}_0} z + \hat{R} + \sqrt{\hat{q}_1 - \hat{q}_0 t} \right) \right\}^m \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} (1 - m) q_1 \hat{q}_1 + \frac{m}{2} q_0 \hat{q}_0 - R \hat{R}. \end{aligned} \quad (251)$$

付録 E スパースな拡散符号を持つ DS-CDMA モデルのレプリカ計算

$$\begin{aligned}
[Z^n] &= \int d\boldsymbol{\eta} p(\boldsymbol{\eta}) \int d\Xi p(\Xi) \left[\prod_{\mu} \int dy^{\mu} p(y^{\mu} | \boldsymbol{\eta}; \Xi) \right] Z^n \\
&= \int d\boldsymbol{\eta} p(\boldsymbol{\eta}) \int \left[\prod_{a=1}^n ds_a p(\mathbf{s}_a) \right] \left[\prod_{\mu} \int dy^{\mu} \mathbb{E}_{\Xi} \left(p(y^{\mu} | \boldsymbol{\eta}; \Xi) \prod_{a=1}^n p(y^{\mu} | \mathbf{s}_a; \Xi) \right) \right] \quad (252)
\end{aligned}$$

を計算する。ここで、 $p(\boldsymbol{\eta})$, $p(\mathbf{s})$, $p(\Xi)$ は各変数の分布関数を表わしている。また、

$$y^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sum_{i=1}^N \xi_i^{\mu} x_i + n^{\mu}, \quad (253)$$

$$p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\eta}; \Xi) = \left(\sqrt{\frac{\beta_0}{2\pi}} \right)^p \exp \left(-\frac{\beta_0}{2} \left\| \mathbf{y} - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \Xi \boldsymbol{\eta} \right\|^2 \right) \quad (254)$$

$$p(\mathbf{y} | \mathbf{s}; \Xi) = \left(\sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \right)^p \exp \left(-\frac{\beta}{2} \left\| \mathbf{y} - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \Xi \mathbf{s} \right\|^2 \right) \quad (255)$$

である。まず、

$$\prod_{\mu} \int dy^{\mu} \mathbb{E}_{\Xi} \left(p(y^{\mu} | \boldsymbol{\eta}; \Xi) \prod_{a=1}^n p(y^{\mu} | \mathbf{s}_a; \Xi) \right) \quad (256)$$

を計算する。 \mathbb{E}_{Ξ} は、 Ξ についての平均を表す。

$$\begin{aligned}
& \prod_{\mu} \int dy^{\mu} \mathbb{E}_{\Xi} \left(p(y^{\mu} | \boldsymbol{\eta}; \Xi) \prod_{a=1}^n p(y^{\mu} | \mathbf{s}_a; \Xi) \right) \\
&= \prod_{\mu} \int dy^{\mu} \sqrt{\frac{\beta_0}{2\pi}} \left(\prod_{a=1}^n \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \right) \\
&\times \mathbb{E}_{\Xi} \left(\exp \left[-\frac{\beta_0}{2} \left(y^{\mu} - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sum_i \xi_i^{\mu} x_{i0} \right)^2 \right] \prod_{a=1}^n \exp \left[-\frac{\beta}{2} \left(y^{\mu} - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sum_i \xi_i^{\mu} x_{ia} \right)^2 \right] \right) \\
&= \prod_{\mu} \int dy^{\mu} \sqrt{\frac{\beta_0}{2\pi}} \left(\sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \right)^n \int dv_0^{\mu} \delta \left(v_0^{\mu} - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sum_{i=1}^N \xi_i^{\mu} \eta_i \right) \prod_{a=1}^n \int dv_a^{\mu} \delta \left(v_a^{\mu} - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sum_{i=1}^N \xi_i^{\mu} x_{ia} \right) \\
&\times \mathbb{E}_{\Xi} \left(\exp \left[-\frac{\beta_0}{2} (y^{\mu} - v_0^{\mu})^2 \right] \prod_{a=1}^n \exp \left[-\frac{\beta}{2} (y^{\mu} - v_a^{\mu})^2 \right] \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta \left(v_0^{\mu} - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sum_{i=1}^N \xi_i^{\mu} \eta_i \right) &= \int \frac{d\hat{v}_0^{\mu}}{2\pi} \exp \left\{ i\hat{v}_0^{\mu} \left(v_0^{\mu} - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sum_{i=1}^N \xi_i^{\mu} \eta_i \right) \right\}, \\
\delta \left(v_a^{\mu} - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sum_{i=1}^N \xi_i^{\mu} x_{ia} \right) &= \int \frac{d\hat{v}_a^{\mu}}{2\pi} \exp \left\{ i\hat{v}_a^{\mu} \left(v_a^{\mu} - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sum_{i=1}^N \xi_i^{\mu} x_{ia} \right) \right\}
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
& \prod_{\mu} \int dy^{\mu} \mathbb{E}_{\Xi} \left(p(y^{\mu} | \boldsymbol{\eta}; \Xi) \prod_{a=1}^n p(y^{\mu} | \mathbf{s}_a; \Xi) \right) \\
&= \prod_{\mu} \int dy^{\mu} \sqrt{\frac{\beta_0}{2\pi}} \left(\sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \right)^n \int dv_0^{\mu} \left(\prod_{a=1}^n dv_a^{\mu} \right) e^{-\frac{\beta_0(y^{\mu}-v_0^{\mu})^2}{2}} \left(\prod_{a=1}^n e^{-\frac{\beta(y^{\mu}-v_a^{\mu})^2}{2}} \right) \\
&\quad \times \frac{1}{2\pi} \int d\omega_0^{\mu} \int \left[\prod_{a=1}^n d\omega_a^{\mu} \right] \mathbb{E}_{\Xi} \left(\exp \left[-i\omega_0^{\mu} (v_0^{\mu} - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sum_i \xi_i^{\mu} x_{i0}) \right] \right) \\
&\quad \times \prod_{a=1}^n \exp \left[-i\omega_a^{\mu} (v_a^{\mu} - \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sum_i \xi_i^{\mu} x_{ia}) \right] \\
&= \prod_{\mu} \int dy^{\mu} \int \frac{d\omega_0^{\mu}}{2\pi} \int \left[\prod_{a=1}^n \frac{d\omega_a^{\mu}}{2\pi} \right] e^{-iy^{\mu} \omega_0^{\mu}} e^{-iy^{\mu} \sum_{a=1}^n \omega_a^{\mu}} e^{-\frac{1}{2\beta_0} (\omega_0^{\mu})^2 - \frac{1}{2\beta} \sum_{a=1}^n (\omega_a^{\mu})^2} \\
&\quad \times \mathbb{E}_{\Xi} \left(e^{\frac{i}{\sqrt{\rho}} \omega_0^{\mu} \sum_i \xi_i^{\mu} x_{i0}} \prod_{a=1}^n e^{\frac{i}{\sqrt{\rho}} \omega_a^{\mu} \sum_i \xi_i^{\mu} x_{ia}} \right) \\
&= \prod_{\mu} \frac{1}{(2\pi)^n} \int d\boldsymbol{\omega}_{\mu} e^{-\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{\mu}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\omega}_{\mu}} \delta(\boldsymbol{\omega}_{\mu} \cdot \mathbf{1}) \mathbb{E}_{\Xi} \left(\prod_{i=1}^N e^{\frac{i}{\sqrt{\rho}} \xi_i^{\mu} \boldsymbol{\omega}_{\mu} \cdot \mathbf{x}_i} \right) \\
&= \prod_{\mu} \frac{1}{(2\pi)^n} \int d\boldsymbol{\omega}_{\mu} e^{-\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{\mu}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\omega}_{\mu}} \delta(\boldsymbol{\omega}_{\mu} \cdot \mathbf{1}) P(\boldsymbol{\omega}). \tag{257}
\end{aligned}$$

ただし、

$$v_0^{\mu} \equiv \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sum_{i=1}^N \xi_i^{\mu} x_{i0}, \tag{258}$$

$$v_a^{\mu} \equiv \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sum_{i=1}^N \xi_i^{\mu} x_{ia}, \tag{259}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} \equiv \text{diag}(\beta_0^{-1}, \beta^{-1}, \dots, \beta^{-1}), \tag{260}$$

$$\mathbf{x}_i = (x_{0i}, x_{1i}, \dots, x_{ni})^T \equiv (\eta_i, s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{in})^T \tag{261}$$

である。この時 $p(\eta_i) = p(x_{0i})$, $p(s_{ai}) = p(x_{ai})$ である。

また、 $P(\boldsymbol{\omega})$ を次のように定義する。

$$P(\boldsymbol{\omega}) \equiv \prod_{\mu} \mathbb{E}_{\Xi} \left(\prod_{i=1}^N e^{\frac{1}{\sqrt{\rho}} \xi_i^{\mu} \boldsymbol{\omega}_{\mu} \cdot \mathbf{x}_i} \right) = \prod_{\mu} \prod_i \int d\xi_i^{\mu} p(\xi_i^{\mu}) e^{\frac{1}{\sqrt{\rho}} \xi_i^{\mu} \boldsymbol{\omega}_{\mu} \cdot \mathbf{x}_i}.$$

ここで

$$p(\xi_i^{\mu}) = (1 - \frac{\rho}{p}) \delta(\xi_i^{\mu}) + \frac{\rho}{p} \pi(\xi_i^{\mu}) \tag{262}$$

より、 $P(\boldsymbol{\omega})$ は

$$P(\boldsymbol{\omega}) = \prod_{\mu} \prod_i \left[(1 - \frac{\rho}{p}) + \frac{\rho}{p} \int d\xi_i^{\mu} \pi(\xi_i^{\mu}) e^{i\xi_i^{\mu} \frac{\boldsymbol{\omega}_{\mu} \cdot \mathbf{x}_i}{\sqrt{\rho}}} \right]. \tag{263}$$

ここで、次の束縛条件を考慮する。

束縛条件：拡散符号 $\{\xi^\mu, \mu = 1 \cdots p\}$ の値が 0 でない要素は厳密に ρ 個とする。

この時、 $P(\boldsymbol{\omega})$ は

$$P(\boldsymbol{\omega}) = \prod_{\mu} \prod_i \left[\left(1 - \frac{\rho}{p}\right) + \frac{\rho}{p} \Theta_i \int d\xi_i^\mu \pi(\xi_i^\mu) e^{i\xi_i^\mu \frac{\boldsymbol{\omega}_\mu \cdot \mathbf{x}_i}{\sqrt{\rho}}} \right] \quad (264)$$

として Θ_i^ρ の係数をとれば良い。

また、

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{\omega} = 0) &= \prod_i \left\{ \prod_{\mu} \left[\left(1 - \frac{\rho}{p}\right) + \frac{\rho}{p} \Theta_i \right] \text{の} \Theta_i^\rho \text{の係数} \right\} \\ &= \prod_i \left\{ \left[\left(1 - \frac{\rho}{p}\right) + \frac{\rho}{p} \Theta_i \right]^p \text{の} \Theta_i^\rho \text{の係数} \right\} \\ &= \prod_i \left\{ {}_p C_\rho \left(\frac{\rho}{p} \Theta_i\right)^\rho \left(1 - \frac{\rho}{p}\right)^{p-\rho} \text{の} \Theta_i^\rho \text{の係数} \right\} = \prod_i {}_p C_\rho \left(\frac{\rho}{p}\right)^\rho \left(1 - \frac{\rho}{p}\right)^{p-\rho} \equiv \mathcal{N}^N \quad (265) \end{aligned}$$

より、規格化条件 $P(\boldsymbol{\omega} = 0) = 1$ を満たす規格化定数は $\frac{1}{\mathcal{N}^N}$ である。

この時、 $P(\boldsymbol{\omega})$ は、次のようになる。

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{\omega}) &= \frac{1}{\mathcal{N}^N} \prod_i \left\{ \prod_{\mu} \left[1 + \frac{\rho}{p} \left(\Theta_i \int d\xi_i^\mu \pi(\xi_i^\mu) e^{i\xi_i^\mu \frac{\boldsymbol{\omega}_\mu \cdot \mathbf{x}_i}{\sqrt{\rho}}} - 1 \right) \right] \text{の} \Theta_i^\rho \text{の係数} \right\} \\ &\sim \frac{1}{\mathcal{N}^N} \prod_i \left\{ \prod_{\mu} \exp\left[\frac{\rho}{p} \left(\Theta_i \phi\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_\mu \cdot \mathbf{x}_i}{\sqrt{\rho}}\right) - 1 \right)\right] \text{の} \Theta_i^\rho \text{の係数} \right\} \\ &= \frac{1}{\mathcal{N}^N} \left\{ \prod_{\mu} \exp\left[\frac{N}{p} \rho \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Theta_i \phi\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_\mu \cdot \mathbf{x}_i}{\sqrt{\rho}}\right) - 1 \right)\right] \text{の} \Theta_i^\rho \text{の係数} \right\} \\ &= \frac{1}{\mathcal{N}^N} \left\{ \prod_{\mu} \exp\left[\frac{\rho}{\alpha} \left(\int \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Theta_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \phi\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_\mu \cdot \mathbf{x}}{\sqrt{\rho}}\right) d\mathbf{x} - 1 \right)\right] \text{の} \Theta_i^\rho \text{の係数} \right\} \\ &= \left\{ \int d\mathbf{c}(\mathbf{x}) \delta\left(c(\mathbf{x}) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Theta_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)\right) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1}{\mathcal{N}^N} \left\{ \prod_{\mu} \exp\left[\frac{\rho}{\alpha} \left(\int c(\mathbf{x}) \phi\left(\frac{\boldsymbol{\omega}_\mu \cdot \mathbf{x}}{\sqrt{\rho}}\right) d\mathbf{x} - 1 \right)\right] \text{の} \Theta_i^\rho \text{の係数} \right\} \right\}. \quad (266) \end{aligned}$$

ここで、

$$\phi\left(\frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}}{\sqrt{\rho}}\right) \equiv \int d\xi \pi(\xi) e^{i\xi \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}}{\sqrt{\rho}}}, \quad (267)$$

$$c(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Theta_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \quad (268)$$

とする。この時、 $[Z^n]$ は、

$$\begin{aligned} [Z^n] &= \int d\mathbf{c}(\mathbf{x}) \int d\boldsymbol{\eta} p(\boldsymbol{\eta}) \int \left(\prod_{a=1}^n ds_a p(\mathbf{x}_a) \right) \left\{ \delta\left(c(\mathbf{x}) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Theta_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)\right) \text{の} \Theta_i^\rho \text{の係数} \right\} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{(2\pi)^n} \int d\boldsymbol{\omega} e^{-\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \Sigma \boldsymbol{\omega}} \delta(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{1}) \bar{P}(\boldsymbol{\omega}) \right)^p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int d\mathbf{c}(\mathbf{x}) \int \prod_{i=1}^N \left[p(x_{0i}) \prod_{a=1}^n p(x_{ai}) \right] d\mathbf{x}_i \left\{ \delta \left(c(\mathbf{x}) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Theta_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \right) \text{の} \Theta_i^\rho \text{の係数} \right\} \\
&\times \left[\frac{1}{(2\pi)^n} \int d\boldsymbol{\omega} e^{-\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \Sigma \boldsymbol{\omega}} \delta(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{1}) \bar{P}(\boldsymbol{\omega}) \right]^p \\
&= \int d\mathbf{c}(\mathbf{x}) \mu(c(\mathbf{x})) \left[\frac{1}{(2\pi)^n} \int d\boldsymbol{\omega} e^{-\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \Sigma \boldsymbol{\omega}} \delta(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{1}) \bar{P}(\boldsymbol{\omega}) \right]^p \tag{269}
\end{aligned}$$

となる。ただし、

$$\bar{P}(\boldsymbol{\omega}) \equiv \frac{1}{N^{\frac{N}{p}}} e^{\frac{\rho}{\alpha} \left(\int c(\mathbf{x}) \phi\left(\frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}}{\sqrt{\rho}}\right) d\mathbf{x} - 1 \right)}, \tag{270}$$

$$\mu(c(\mathbf{x})) \equiv \int \prod_{i=1}^N \left[p(x_{0i}) \prod_{a=1}^n p(x_{ai}) \right] d\mathbf{x}_i \left\{ \delta \left(c(\mathbf{x}) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Theta_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \right) \text{の} \Theta_i^\rho \text{の係数} \right\} \tag{271}$$

とおいた。

ここで $N, p \rightarrow \infty$, $\alpha = \frac{p}{N}$ 有限の大システム極限を考え、 $c(\mathbf{x})$ についての積分を鞍点で評価する。

$$\begin{aligned}
\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log [Z^N] &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \int d\mathbf{c}(\mathbf{x}) \mu(c(\mathbf{x})) \left[\frac{1}{(2\pi)^n} \int d\boldsymbol{\omega} e^{-\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \Sigma \boldsymbol{\omega}} \delta(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{1}) \bar{P}(\boldsymbol{\omega}) \right]^p \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \int d\mathbf{c}(\mathbf{x}) e^{\log \mu(c(\mathbf{x})) + p \log \left[\frac{1}{(2\pi)^n} \int d\boldsymbol{\omega} e^{-\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \Sigma \boldsymbol{\omega}} \delta(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{1}) \bar{P}(\boldsymbol{\omega}) \right]} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{p}{N} \sup_{c(\mathbf{x})} \left\{ \frac{1}{p} \log \mu(c(\mathbf{x})) + \log \int d\boldsymbol{\omega} e^{-\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \Sigma \boldsymbol{\omega}} \delta(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{1}) \bar{P}(\boldsymbol{\omega}) - n \log 2\pi \right\}. \tag{272}
\end{aligned}$$

$\mu(c(\mathbf{x}))$ を計算する。

$$\begin{aligned}
\mu(c(\mathbf{x})) &= \int \left[\prod_{i=1}^N d\mathbf{x}_i p(x_{0i}) \prod_{a=1}^n p(x_{ai}) \right] \left\{ \delta \left(c(\mathbf{x}) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Theta_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \right) \text{の} \Theta_i^\rho \text{の係数} \right\} \\
&= \int \left[\prod_{i=1}^N d\mathbf{x}_i p(x_{0i}) \prod_{a=1}^n p(x_{ai}) \right] \left\{ \int \frac{d\tilde{c}(\mathbf{x})}{2\pi} e^{-i \int \tilde{c}(\mathbf{x}) (c(\mathbf{x}) - \frac{1}{N} \Theta_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)) d\mathbf{x}} \text{の} \Theta_i^\rho \text{の係数} \right\} \\
&= \int \frac{dN \tilde{c}(\mathbf{x})}{2\pi i} e^{-N \int \tilde{c}(\mathbf{x}) c(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} \\
&\times \left\{ \int \left[\prod_{i=1}^N d\mathbf{x}_i p(x_{0i}) \prod_{a=1}^n p(x_{ai}) e^{\Theta_i \int \tilde{c}(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) d\mathbf{x}} \right] \text{の} \Theta_i^\rho \text{の係数} \right\} \\
&= \int \frac{dN \tilde{c}(\mathbf{x})}{2\pi i} e^{-N \int \tilde{c}(\mathbf{x}) c(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} \left\{ \int \left[\prod_{i=1}^N d\mathbf{x}_i p(x_{0i}) \prod_{a=1}^n p(x_{ai}) e^{\Theta_i \tilde{c}(\mathbf{x}_i)} \right] \text{の} \Theta_i^\rho \text{の係数} \right\} \\
&= \int \frac{dN \tilde{c}(\mathbf{x})}{2\pi i} e^{-N \int \tilde{c}(\mathbf{x}) c(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} \left[\int d\mathbf{x} p(x_0) \prod_{a=1}^n p(x_a) e^{\Theta \tilde{c}(\mathbf{x})} \text{の} \Theta^\rho \text{の係数} \right]^N \\
&= \int \frac{dN \tilde{c}(\mathbf{x})}{2\pi i} e^{-N \int \tilde{c}(\mathbf{x}) c(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} \left[\int d\mathbf{x} p(x_0) \left[\prod_{a=1}^n p(x_a) \right] \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\Theta \tilde{c}(\mathbf{x}))^j}{j!} \text{の} \Theta^\rho \text{の係数} \right]^N \\
&= \int \frac{dN \tilde{c}(\mathbf{x})}{2\pi i} e^{-N \int \tilde{c}(\mathbf{x}) c(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} \left[\int d\mathbf{x} p(x_0) \left[\prod_{a=1}^n p(x_a) \right] \frac{(\tilde{c}(\mathbf{x}))^\rho}{\rho!} \right]^N
\end{aligned}$$

$$= \int \frac{dN\tilde{c}(\mathbf{x})}{2\pi i} e^{-N\left\{ \int \tilde{c}(\mathbf{x})c(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \log \left[\int d\mathbf{x}p(x_0) \left[\prod_{a=1}^n p(x_a) \right] \frac{(\tilde{c}(\mathbf{x}))^\rho}{\rho!} \right] \right\}}. \quad (273)$$

これを用いると、(272) 式は最終的に次のように表される。

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log [Z^n] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{c(\mathbf{x})} \left\{ \alpha \left(\log \int d\boldsymbol{\omega} e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \Sigma \boldsymbol{\omega}} \delta(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{1}) \bar{P}(\boldsymbol{\omega}) - n \log 2\pi \right) + \frac{1}{N} \log \mu(c(\mathbf{x})) \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{c(\mathbf{x})} \left\{ \alpha \left(\log \int d\boldsymbol{\omega} e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \Sigma \boldsymbol{\omega}} \delta(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{1}) \bar{P}(\boldsymbol{\omega}) - n \log 2\pi \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{N} \log \int \frac{dN\tilde{c}(\mathbf{x})}{2\pi i} e^{-N\left\{ \int \tilde{c}(\mathbf{x})c(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \log \left[\int d\mathbf{x}p(x_0) \left[\prod_{a=1}^n p(x_a) \right] \frac{(\tilde{c}(\mathbf{x}))^\rho}{\rho!} \right] \right\}} \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{c(\mathbf{x})} \left\{ \alpha \left(\log \int d\boldsymbol{\omega} e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \Sigma \boldsymbol{\omega}} \delta(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{1}) \bar{P}(\boldsymbol{\omega}) - n \log 2\pi \right) \right. \\ & \quad \left. + \sup_{\tilde{c}(\mathbf{x})} \left\{ - \int \tilde{c}(\mathbf{x})c(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \log \left[\int d\mathbf{x}p(x_0) \left[\prod_{a=1}^n p(x_a) \right] \frac{(\tilde{c}(\mathbf{x}))^\rho}{\rho!} \right] \right\} \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{c(\mathbf{x})} \{ \alpha \mathcal{G}(c(\mathbf{x})) - \mathcal{I}(c(\mathbf{x})) \}, \end{aligned} \quad (274)$$

$$\mathcal{G}(c(\mathbf{x})) = \log \int d\boldsymbol{\omega} e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \Sigma \boldsymbol{\omega}} \delta(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{1}) \bar{P}(\boldsymbol{\omega}) - n \log 2\pi, \quad (275)$$

$$\mathcal{I}(c(\mathbf{x})) = \sup_{\tilde{c}(\mathbf{x})} \left\{ \int \tilde{c}(\mathbf{x})c(\mathbf{x})d\mathbf{x} - \log \left[\int d\mathbf{x}p(x_0) \left[\prod_{a=1}^n p(x_a) \right] (\tilde{c}(\mathbf{x}))^\rho \right] + \log \rho! \right\}. \quad (276)$$

付録 F スパースな拡散符号を持つ DS-CDMA モデルのレプリカ対称解

送信情報が +1 と -1 のみをとるバイナリの場合について考える。送信情報は +1 と -1 が等確率で出現する一様な事前分布 $p(\boldsymbol{\eta}) = p(\boldsymbol{s}) = \frac{1}{2^N}$ に従うとする。したがって、 $x_{0i} = \pm 1, x_{ai} = \pm 1$ となる。

この場合におけるレプリカ対称解 $c^{\text{RS}}(\boldsymbol{x}), \tilde{c}^{\text{RS}}(\boldsymbol{x})$ を次のようにとる。

$$c^{\text{RS}}(\boldsymbol{x}) = \int P(h) \frac{e^{hx_0 \sum_{a=1}^n x_a}}{2(2 \cosh h)^n} dh, \quad (277)$$

$$\tilde{c}^{\text{RS}}(\boldsymbol{x}) = \int \tilde{P}(\tilde{h}) \frac{e^{\tilde{h}x_0 \sum_{a=1}^n x_a}}{2(2 \cosh \tilde{h})^n} d\tilde{h}. \quad (278)$$

この時、 $c^{\text{RS}}(\boldsymbol{x}), \tilde{c}^{\text{RS}}(\boldsymbol{x})$ は、レプリカの添字 $a = 1, \dots, n$ の入れ替えに依存しない。ただし、(268) 式より h は

$$\int P(h) dh = 1 \quad (279)$$

を満たす。

$\mathcal{G}(c^{\text{RS}}(\boldsymbol{x}))$ と $\mathcal{I}(c^{\text{RS}}(\boldsymbol{x}))$ を計算する。

$$\begin{aligned} \int c^{\text{RS}}(\boldsymbol{x}) \phi\left(\frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{x}}{\sqrt{\rho}}\right) d\boldsymbol{x} &= \int \int P(h) \frac{e^{hx_0 \sum_{a=1}^n x_a}}{2(2 \cosh h)^n} dh \int \pi(\xi) e^{i \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{x}}{\sqrt{\rho}} \xi} d\xi d\boldsymbol{x} \\ &= \int \int \pi(\xi) P(h) \frac{1}{2(2 \cosh h)^n} \left[\int d\boldsymbol{x} e^{hx_0 \sum_{a=1}^n x_a + i \xi \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{x}}{\sqrt{\rho}}} \right] d\xi dh \\ &= \int \int \pi(\xi) P(h) \frac{1}{2(2 \cosh h)^n} \left[\sum_{\boldsymbol{x}=\{\pm 1\}} e^{hx_0 \sum_{a=1}^n x_a + i \xi \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{x}}{\sqrt{\rho}}} \right] d\xi dh \\ &= \int \int \pi(\xi) P(h) \frac{1}{2(\cosh h)^n} \sum_{x_0=\pm 1} e^{i \frac{\xi}{\sqrt{\rho}} \omega_0 x_0} \prod_{a=1}^n \cosh(hx_0 + i \frac{\xi}{\sqrt{\rho}} \omega_a) d\xi dh \\ &= \frac{1}{2} \int \int \pi(\xi) P(h) \sum_{x_0=\pm 1} e^{i \frac{\xi}{\sqrt{\rho}} \omega_0 x_0} \\ &\quad \times \prod_{a=1}^n \left\{ \frac{\cosh(hx_0)}{\cosh h} \cosh\left(i \frac{\xi}{\sqrt{\rho}} \omega_a\right) + \frac{\sinh(hx_0)}{\cosh h} \sinh\left(i \frac{\xi}{\sqrt{\rho}} \omega_a\right) \right\} d\xi dh \\ &= \int \int \bar{\pi}(\xi) P(h) e^{i \frac{\xi}{\sqrt{\rho}} \omega_0} \prod_{a=1}^n \cosh\left(i \frac{\xi}{\sqrt{\rho}} \omega_a\right) \left\{ 1 + \tanh h \tanh\left(i \frac{\xi}{\sqrt{\rho}} \omega_a\right) \right\} d\xi dh. \end{aligned} \quad (280)$$

ただし、 $\bar{\pi}(\xi)$ は

$$\bar{\pi}(\xi) = \frac{1}{2} \{ \pi(\xi) + \pi(-\xi) \} \quad (281)$$

である。

(280) 式より、 $\mathcal{G}(c^{\text{RS}}(\boldsymbol{x}))$ は

$$\mathcal{G}(c^{\text{RS}}(\boldsymbol{x})) = \log \int d\boldsymbol{\omega} e^{-\frac{1}{2\beta_0} \omega_0^2 - \frac{1}{2\beta} \sum_{a=1}^n \omega_a^2} \delta(\omega_0 + \sum_{a=1}^n \omega_a) e^{\frac{\rho}{\alpha} \int c^{\text{RS}}(\boldsymbol{x}) \phi\left(\frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{x}}{\sqrt{\rho}}\right) d\boldsymbol{x} - 1}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\alpha} \log \mathcal{N} - n \log 2\pi \\
& = \log \int \prod_{a=1}^n d\omega_a e^{-\frac{1}{2\beta_0} (\sum_{a=1}^n \omega_a)^2 - \frac{1}{2\beta} \sum_{a=1}^n \omega_a^2} \\
& \quad \times \left\langle \left[\int c^{\text{RS}}(\mathbf{x}) \phi\left(\frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}}{\sqrt{\rho}}\right) \Big|_{\omega_0 = -\sum_{a=1}^n \omega_a} d\mathbf{x} \right]^L \right\rangle_L - \frac{1}{\alpha} \log \mathcal{N} - n \log 2\pi \\
& = \log \int Dz \left\langle \left[\prod_{l=1}^L dh_l P(h_l) d\xi_l \bar{\pi}(\xi_l) \left\{ \int d\omega e^{-\frac{1}{2\beta} \omega^2 + i \frac{1}{\sqrt{\beta_0}} z \omega} \left(\prod_{l=1}^L e^{-i \frac{\omega}{\sqrt{\rho}} \xi_l} \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \times \cosh\left(i \frac{\omega}{\sqrt{\rho}} \xi_l\right) [1 + \tanh h_l \tanh\left(i \frac{\omega}{\sqrt{\rho}} \xi_l\right)] \right\} \right]^n \right\rangle_L - \frac{1}{\alpha} \log \mathcal{N} - n \log 2\pi. \quad (282)
\end{aligned}$$

ここで次の関係式を用いた。

ポアソン分布の積率母関数：

$$\begin{aligned}
\exp[\lambda(e^t - 1)] & = \sum_{L=0}^{\infty} \frac{\lambda^L e^{-\lambda}}{L!} e^{tL} \equiv \langle e^{tL} \rangle_L. \quad (283) \\
\therefore \sum_{L=0}^{\infty} \frac{\lambda^L e^{-\lambda}}{L!} e^{tL} & = e^{-\lambda} \sum_{L=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^L}{L!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = \exp[\lambda(e^t - 1)]
\end{aligned}$$

ポアソン分布の期待値：

$$\langle L \rangle_L = \sum_{L=0}^{\infty} \frac{\lambda^L e^{-\lambda}}{L!} L = \lambda \sum_{L=1}^{\infty} \frac{\lambda^{L-1} e^{-\lambda}}{(L-1)!} = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda. \quad (284)$$

$\langle \cdot \rangle_L$ はポアソン分布についての平均を表し、ここでは

$$\langle L \rangle_L = \frac{\rho}{\alpha}. \quad (285)$$

である。以後、 $\langle \cdot \rangle_L$ はポアソン分布についての平均を表す。

(282) 式を整理する。

$$\begin{aligned}
& e^{-i \frac{\omega}{\sqrt{\rho}} \xi_l} \cosh\left(i \frac{\omega}{\sqrt{\rho}} \xi_l\right) [1 + \tanh h_l \tanh\left(i \frac{\omega}{\sqrt{\rho}} \xi_l\right)] \\
& = \frac{1}{2} \sum_{\tau_l = \pm 1} e^{i \frac{\omega}{\sqrt{\rho}} \xi_l (\tau_l - 1)} \{1 + \tau_l \tanh h_l\}, \quad (286) \\
& \int d\omega e^{-\frac{1}{2\beta} \omega^2 + i \frac{1}{\sqrt{\beta_0}} z \omega} \frac{1}{2^L} \prod_{l=1}^L \left[\sum_{\tau_l = \pm 1} e^{i \frac{\omega}{\sqrt{\rho}} \xi_l (\tau_l - 1)} \{1 + \tau_l \tanh h_l\} \right] \\
& = \sqrt{2\pi\beta} \frac{1}{2^L} \left[\prod_{l=1}^L (1 + \tanh h_l) \right] \sum_{\boldsymbol{\tau}} e^{\sum_{l=1}^L (\tau_l - 1) h_l - \frac{\beta}{2} \left(z \frac{1}{\sqrt{\beta_0}} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sum_{l=1}^L \xi_l (\tau_l - 1)\right)^2} \\
& = \sum_{\boldsymbol{\tau} = \pm 1} (1 + \tanh h_L) e^{(\boldsymbol{\tau} - 1) h_L} \Omega(\boldsymbol{\tau}) \\
& = (\Omega(1) + \Omega(-1)) \left(1 + \tanh \left(\frac{1}{2} \log \frac{\Omega(1)}{\Omega(-1)} \right) \tanh h_L \right). \quad (287)
\end{aligned}$$

ここで、

$$\Omega(\boldsymbol{\tau}) = \sqrt{2\pi\beta} \left[\prod_{l=1}^{L-1} (1 + \tanh h_l) \right] \frac{1}{2^L} \sum_{\boldsymbol{\tau} = \{-1, 1\}^{L-1}} \exp \left[\sum_{l=1}^{L-1} (\tau_l - 1) h_l \right]$$

$$-\frac{\beta}{2}\left(z\frac{1}{\sqrt{\beta_0}} + \frac{1}{\sqrt{\rho}}\left\{\sum_{l=1}^{L-1}\xi_l(\tau_l - 1) + \xi_L(\tau - 1)\right\}\right)^2, \quad (288)$$

$$\begin{aligned} \Omega(1) &= \sqrt{2\pi\beta} \left[\prod_{l=1}^{L-1} (1 + \tanh h_l) \right] \frac{1}{2^L} e^{-\frac{\beta}{2\beta_0} z^2} \sum_{\boldsymbol{\tau}=\{-1,1\}^{L-1}} \exp \left[\sum_{l=1}^{L-1} (\tau_l - 1) h_l \right. \\ &\quad \left. - \beta \frac{z \frac{1}{\sqrt{\beta_0}}}{\sqrt{\rho}} \sum_{l=1}^{L-1} \xi_l(\tau_l - 1) - \frac{\beta(\sum_{l=1}^{L-1} \xi_l(\tau_l - 1))^2}{2\rho} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2\pi\beta} \left[\prod_{l=1}^{L-1} \frac{1 + \tanh h_l}{2} \right] e^{-\frac{\beta}{2\beta_0} z^2} \sum_{\boldsymbol{\tau}=\{-1,1\}^{L-1}} \exp \left[\sum_{l=1}^{L-1} (\tau_l - 1) h_l \right. \\ &\quad \left. - \beta \frac{z \frac{1}{\sqrt{\beta_0}}}{\sqrt{\rho}} \sum_{l=1}^{L-1} \xi_l(\tau_l - 1) - \frac{\beta(\sum_{l=1}^{L-1} \xi_l(\tau_l - 1))^2}{2\rho} \right], \end{aligned} \quad (289)$$

$$\begin{aligned} \Omega(-1) &= \frac{1}{2} \sqrt{2\pi\beta} \left[\prod_{l=1}^{L-1} \frac{1 + \tanh h_l}{2} \right] e^{-\frac{\beta}{2}\left(z\frac{1}{\sqrt{\beta_0}} - \frac{z}{\sqrt{\rho s_L}}\right)^2} \sum_{\boldsymbol{\tau}=\{-1,1\}^{L-1}} \exp \left[\sum_{l=1}^{L-1} (\tau_l - 1) h_l \right. \\ &\quad \left. - \beta \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left(z \frac{1}{\sqrt{\beta_0}} - \frac{2\xi_L}{\sqrt{\rho}} \right) \sum_{l=1}^{L-1} \xi_l(\tau_l - 1) - \frac{\beta(\sum_{l=1}^{L-1} \xi_l(\tau_l - 1))^2}{2\rho} \right] \end{aligned} \quad (290)$$

である。ゆえに、

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(c^{\text{RS}}(\mathbf{x})) &= \log \int Dz \left\langle \int \left[\prod_{l=1}^L dh_l P(h_l) d\xi_l \bar{\pi}(\xi_l) \right] \{(\Omega(1) + \Omega(-1)) \right. \\ &\quad \left. \times \left(1 + \tanh \left(\frac{1}{2} \log \frac{\Omega(1)}{\Omega(-1)} \right) \tanh h_L \right) \right\}^n \Bigg\rangle_L \\ &\quad - \frac{1}{\alpha} \log \mathcal{N} - n \log 2\pi. \end{aligned} \quad (291)$$

次に $\mathcal{I}(c^{\text{RS}}(\mathbf{x}))$ を計算する。

$$\begin{aligned} \int c^{\text{RS}}(\mathbf{x}) \tilde{c}^{\text{RS}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int \int \int P(h) \tilde{P}(\tilde{h}) \frac{e^{hx_0 \sum_{a=1}^n x_a}}{2(2 \cosh h)^n} \frac{e^{\tilde{h}x_0 \sum_{a=1}^n x_a}}{2(2 \cosh \tilde{h})^n} d\mathbf{x} dh d\tilde{h} \\ &= \int \int \int P(h) \tilde{P}(\tilde{h}) \frac{1}{2(2 \cosh h)^n} \frac{1}{2(2 \cosh \tilde{h})^n} \left[\prod_{a=1}^n e^{(h+\tilde{h})x_0 x_a} dx_a \right] dx_0 dh d\tilde{h}. \end{aligned}$$

一様な事前分布を考えているので、

$$\begin{aligned} \int \left[\prod_{a=1}^n e^{(h+\tilde{h})x_0 x_a} dx_a \right] dx_0 &= \sum_{x_0=\pm 1} \prod_{a=1}^n \sum_{x_a=\pm 1} e^{(h+\tilde{h})x_0 x_a} \\ &= \sum_{x_0=\pm 1} \prod_{a=1}^n \left(e^{(h+\tilde{h})x_0} + e^{-(h+\tilde{h})x_0} \right) = \sum_{x_0=\pm 1} \left(e^{(h+\tilde{h})x_0} + e^{-(h+\tilde{h})x_0} \right)^n \\ &= \left(e^{(h+\tilde{h})} + e^{-(h+\tilde{h})} \right)^n + \left(e^{-(h+\tilde{h})} + e^{(h+\tilde{h})} \right)^n = 2 \left\{ 2 \cosh(h + \tilde{h}) \right\}^n \\ &= 2^{n+1} \left\{ \cosh h \cosh \tilde{h} + \sinh h \sinh \tilde{h} \right\} \end{aligned} \quad (292)$$

より、

$$\int c^{\text{RS}}(\mathbf{x}) \tilde{c}^{\text{RS}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int P(h) \tilde{P}(\tilde{h}) \frac{1}{2^{n+1}} (1 + \tanh h \tanh \tilde{h})^n dh d\tilde{h}. \quad (293)$$

また、

$$\begin{aligned}
& \int (\tilde{c}^{\text{RS}}(\mathbf{x}))^\rho p(x_0) \left[\prod_{a=1}^n p(x_a) \right] d\mathbf{x} \\
&= \int d\mathbf{x} \int \cdots \int \left[\prod_{c=1}^{\rho} d\tilde{h}_c \tilde{P}(\tilde{h}_c) \frac{e^{\tilde{h}_c x_0 \sum_{a=1}^n x_a}}{2(2 \cosh \tilde{h}_c)^n} \right] \frac{1}{2^{n+1}} \prod_{a=0}^n [\delta(x_a - 1) + \delta(x_a + 1)] \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \int \cdots \int \left[\prod_{c=1}^{\rho} d\tilde{h}_c \tilde{P}(\tilde{h}_c) \frac{1}{2(2 \cosh \tilde{h}_c)^n} \right] \sum_{x_0=\pm 1} \left\{ \sum_{x=\pm 1} e^{x_0 x \sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_c} \right\}^n \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \int \cdots \int \left[\prod_{c=1}^{\rho} d\tilde{h}_c \tilde{P}(\tilde{h}_c) \frac{1}{2(2 \cosh \tilde{h}_c)^n} \right] \sum_{x_0=\pm 1} \left\{ 2 \cosh(x_0 \sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_c) \right\}^n \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \int \cdots \int \left[\prod_{c=1}^{\rho} d\tilde{h}_c \tilde{P}(\tilde{h}_c) \frac{1}{2(2 \cosh \tilde{h}_c)^n} \right] 2 \left\{ 2 \cosh(\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_c) \right\}^n \\
&= \int \cdots \int \frac{1}{2^{\rho+n\rho}} \left[\prod_{c=1}^{\rho} d\tilde{h}_c \tilde{P}(\tilde{h}_c) \frac{1}{(\cosh \tilde{h}_c)^n} \right] \left\{ \cosh(\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_c) \right\}^n \tag{294}
\end{aligned}$$

より、 $\mathcal{I}(c^{\text{RS}}(\mathbf{x}))$ は次のように表される。

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(c^{\text{RS}}(\mathbf{x})) &= \int P(h) \tilde{P}(\tilde{h}) \frac{1}{2^{n+1}} (1 + \tanh h \tanh \tilde{h})^n dh d\tilde{h} \\
&\quad - \log \int \cdots \int \frac{1}{2^{\rho+n\rho}} \left[\prod_{c=1}^{\rho} d\tilde{h}_c \tilde{P}(\tilde{h}_c) \frac{1}{(\cosh \tilde{h}_c)^n} \right] \left\{ \cosh(\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_c) \right\}^n + \log \rho!. \tag{295}
\end{aligned}$$

次に鞍点条件

$$\frac{\delta}{\delta \tilde{P}(\tilde{h})} \left\{ \alpha \mathcal{G}(c^{\text{RS}}(\mathbf{x})) - \mathcal{I}(c^{\text{RS}}(\mathbf{x})) \right\} = 0, \tag{296}$$

$$\frac{\delta}{\delta P(h)} \left\{ \alpha \mathcal{G}(c^{\text{RS}}(\mathbf{x})) - \mathcal{I}(c^{\text{RS}}(\mathbf{x})) \right\} = 0 \tag{297}$$

より、鞍点方程式を導出する。

まず、(296) 式を計算する。(291) 式より

$$\frac{\delta}{\delta \tilde{P}(\tilde{h})} \mathcal{G}(c^{\text{RS}}(\mathbf{x})) = 0. \tag{298}$$

また、

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta}{\delta \tilde{P}(\tilde{h})} \int \cdots \int \frac{1}{2^{\rho+n\rho}} \left[\prod_{c=1}^{\rho} d\tilde{h}_c \tilde{P}(\tilde{h}_c) \frac{1}{(\cosh \tilde{h}_c)^n} \right] \left\{ \cosh(\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_c) \right\}^n \\
&= \frac{1}{2^{\rho+n\rho}} \frac{\delta}{\delta \tilde{P}(\tilde{h})} \int \cdots \int \left[\prod_{c=1}^{\rho} d\tilde{h}_c \tilde{P}(\tilde{h}_c) \right] \left\{ \frac{\cosh(\tilde{h}_1 + \cdots + \tilde{h}_\rho)}{\cosh \tilde{h}_1 \cdots \cosh \tilde{h}_\rho} \right\}^n \\
&= \frac{1}{2^{\rho+n\rho}} \left\{ \int \cdots \int d\tilde{h}_2 d\tilde{h}_3 \cdots d\tilde{h}_\rho \tilde{P}(\tilde{h}_2) \tilde{P}(\tilde{h}_3) \cdots \tilde{P}(\tilde{h}_\rho) \left\{ \frac{\cosh(\tilde{h} + \tilde{h}_2 + \cdots + \tilde{h}_\rho)}{\cosh \tilde{h} \cosh \tilde{h}_2 \cdots \cosh \tilde{h}_\rho} \right\}^n \right. \\
&\quad + \int \cdots \int d\tilde{h}_1 d\tilde{h}_3 \cdots d\tilde{h}_\rho \tilde{P}(\tilde{h}_1) \tilde{P}(\tilde{h}_3) \cdots \tilde{P}(\tilde{h}_\rho) \left\{ \frac{\cosh(\tilde{h}_1 + \tilde{h} + \cdots + \tilde{h}_\rho)}{\cosh \tilde{h}_1 \cosh \tilde{h} \cdots \cosh \tilde{h}_\rho} \right\}^n \\
&\quad \left. + \cdots + \int \cdots \int d\tilde{h}_1 \cdots d\tilde{h}_{\rho-1} \tilde{P}(\tilde{h}_1) \cdots \tilde{P}(\tilde{h}_{\rho-1}) \left\{ \frac{\cosh(\tilde{h}_1 + \cdots + \tilde{h})}{\cosh \tilde{h}_1 \cdots \cosh \tilde{h}} \right\}^n \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{ここで } \cosh(\tilde{h} + \tilde{h}_2 + \cdots + \tilde{h}_\rho) = \cosh \tilde{h} \cosh(\sum_{c=2}^\rho \tilde{h}_c) + \sinh \tilde{h} \sinh(\sum_{c=2}^\rho \tilde{h}_c) \text{ より} \\
& = \frac{\rho}{2^{\rho+n\rho}} \int \cdots \int d\tilde{h}_1 \cdots d\tilde{h}_{\rho-1} \tilde{P}(\tilde{h}_1) \cdots \tilde{P}(\tilde{h}_{\rho-1}) \left\{ \frac{\cosh(\sum_{c=1}^{\rho-1} \tilde{h}_c)}{\prod_{c=1}^{\rho-1} \cosh \tilde{h}_c} + \tanh \tilde{h} \frac{\sinh(\sum_{c=1}^{\rho-1} \tilde{h}_c)}{\prod_{c=1}^{\rho-1} \cosh \tilde{h}_c} \right\}^n \\
& = \frac{\rho}{2^{\rho+n\rho}} \int dh [\cosh h + \tanh \tilde{h} \sinh h]^n \int \cdots \int \left[\prod_{c=1}^{\rho-1} \frac{d\tilde{h}_c \tilde{P}(\tilde{h}_c)}{\{\cosh \tilde{h}_c\}^n} \right] \delta \left(h - \sum_{c=1}^{\rho-1} \tilde{h}_c \right) \\
& = \frac{\rho}{2^{\rho+n\rho}} \int dh (\cosh h)^n (1 + \tanh \tilde{h} \tanh h)^n \int \cdots \int \left[\prod_{c=1}^{\rho-1} \frac{d\tilde{h}_c \tilde{P}(\tilde{h}_c)}{\{\cosh \tilde{h}_c\}^n} \right] \delta \left(h - \sum_{c=1}^{\rho-1} \tilde{h}_c \right) \quad (299)
\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta}{\delta \tilde{P}(\tilde{h})} \mathcal{I}(c^{\text{RS}}(\mathbf{x})) = \frac{1}{2^{n+1}} \int (1 + \tanh h \tanh \tilde{h})^n P(h) dh \\
& \quad - \frac{\rho \int dh (\cosh h)^n (1 + \tanh \tilde{h} \tanh h)^n \int \cdots \int \left[\prod_{c=1}^{\rho-1} \frac{d\tilde{h}_c \tilde{P}(\tilde{h}_c)}{\{\cosh \tilde{h}_c\}^n} \right] \delta \left(h - \sum_{c=1}^{\rho-1} \tilde{h}_c \right)}{\int \cdots \int \left[\prod_{c=1}^\rho d\tilde{h}_c \tilde{P}(\tilde{h}_c) \frac{1}{(\cosh \tilde{h}_c)^n} \right] \left\{ \cosh(\sum_{c=1}^\rho \tilde{h}_c) \right\}^n} \quad (300)
\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2^{n+1}} \int (1 + \tanh h \tanh \tilde{h})^n P(h) dh \\
& = \frac{\rho \int dh (\cosh h)^n (1 + \tanh \tilde{h} \tanh h)^n \int \cdots \int \left[\prod_{c=1}^{\rho-1} \frac{d\tilde{h}_c \tilde{P}(\tilde{h}_c)}{\{\cosh \tilde{h}_c\}^n} \right] \delta \left(h - \sum_{c=1}^{\rho-1} \tilde{h}_c \right)}{\int \cdots \int \left[\prod_{c=1}^\rho d\tilde{h}_c \tilde{P}(\tilde{h}_c) \frac{1}{(\cosh \tilde{h}_c)^n} \right] \left\{ \cosh(\sum_{c=1}^\rho \tilde{h}_c) \right\}^n}. \quad (301)
\end{aligned}$$

$n \rightarrow 0$ とすると、

$$\frac{1}{2} P(h) = \frac{\rho \int \cdots \int \left[\prod_{c=1}^{\rho-1} d\tilde{h}_c \tilde{P}(\tilde{h}_c) \right] \delta \left(h - \sum_{c=1}^{\rho-1} \tilde{h}_c \right)}{\int \cdots \int \left[\prod_{c=1}^\rho d\tilde{h}_c \tilde{P}(\tilde{h}_c) \right]}. \quad (302)$$

$$\therefore P(h) = 2 \frac{\rho \int \cdots \int \left[\prod_{c=1}^{\rho-1} d\tilde{h}_c \tilde{P}(\tilde{h}_c) \right] \delta \left(h - \sum_{c=1}^{\rho-1} \tilde{h}_c \right)}{\int \cdots \int \left[\prod_{c=1}^\rho d\tilde{h}_c \tilde{P}(\tilde{h}_c) \right]}. \quad (303)$$

次に、(297) 式を計算する。

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta}{\delta P(h)} \mathcal{G}(c^{\text{RS}}(\mathbf{x})) \\
& = \frac{1}{\int Dz \left\langle \int \left[\prod_{l=1}^L dh_l P(h_l) d\xi_l \bar{\pi}(\xi_l) \right] \left\{ (\Omega(1) + \Omega(-1)) \left(1 + \tanh \left(\frac{1}{2} \log \frac{\Omega(1)}{\Omega(-1)} \right) \tanh h_L \right) \right\}^n \right\rangle_L} \\
& \times \int Dz \left\langle \int \frac{\delta}{\delta P(h)} dh_L P(h_L) d\xi_L \bar{\pi}(\xi_L) \left[\prod_{l=1}^{L-1} dh_l P(h_l) d\xi_l \bar{\pi}(\xi_l) \right] \right. \\
& \quad \left. \times \left\{ (\Omega(1) + \Omega(-1)) \left(1 + \tanh \left(\frac{1}{2} \log \frac{\Omega(1)}{\Omega(-1)} \right) \tanh h_L \right) \right\}^n + \cdots \right\rangle_L \\
& = \frac{\int Dz \left\langle L \int d\xi_L \bar{\pi}(\xi_L) \left[\prod_{l=1}^{L-1} dh_l P(h_l) d\xi_l \bar{\pi}(\xi_l) \right] \left\{ (\Omega(1) + \Omega(-1)) \left(1 + \tanh \left(\frac{1}{2} \log \frac{\Omega(1)}{\Omega(-1)} \right) \tanh h \right) \right\}^n \right\rangle_L}{\int Dz \left\langle \int \left[\prod_{l=1}^L dh_l P(h_l) d\xi_l \bar{\pi}(\xi_l) \right] \left\{ (\Omega(1) + \Omega(-1)) \left(1 + \tanh \left(\frac{1}{2} \log \frac{\Omega(1)}{\Omega(-1)} \right) \tanh h_L \right) \right\}^n \right\rangle_L}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\int Dz \left\langle \int \left[\prod_{l=1}^L dh_l P(h_l) d\xi_l \bar{\pi}(\xi_l) \right] \left\{ (\Omega(1) + \Omega(-1)) \left(1 + \tanh \left(\frac{1}{2} \log \frac{\Omega(1)}{\Omega(-1)} \right) \tanh h_L \right) \right\}^n \right\rangle_L} \\
&\quad \times \int d\tilde{h} \int Dz \left\langle L \int d\xi_L \bar{\pi}(\xi_L) \left[\prod_{l=1}^{L-1} dh_l P(h_l) d\xi_l \bar{\pi}(\xi_l) \right] \left\{ (\Omega(1) + \Omega(-1)) \left(1 + \tanh \tilde{h} \tanh h \right) \right\}^n \right\rangle_L \\
&\quad \times \delta \left(\tilde{h} - \frac{1}{2} \log \frac{\Omega(1)}{\Omega(-1)} \right) \Bigg\rangle_L, \tag{304}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta P(h)} \mathcal{I}(c^{\text{RS}}(\mathbf{x})) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \int (1 + \tanh h \tanh \tilde{h})^n \tilde{P}(\tilde{h}) d\tilde{h}. \tag{305}
\end{aligned}$$

(304)、(305) 式より、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2^{n+1}} \int (1 + \tanh h \tanh \tilde{h})^n \tilde{P}(\tilde{h}) d\tilde{h} \\
&= \alpha \frac{1}{\int Dz \left\langle \int \left[\prod_{l=1}^L dh_l P(h_l) d\xi_l \bar{\pi}(\xi_l) \right] \left\{ (\Omega(1) + \Omega(-1)) \left(1 + \tanh \left(\frac{1}{2} \log \frac{\Omega(1)}{\Omega(-1)} \right) \tanh h_L \right) \right\}^n \right\rangle_L} \\
&\quad \times \int d\tilde{h} (1 + \tanh h \tanh \tilde{h})^n \int Dz \left\langle L \int d\xi_L \bar{\pi}(\xi_L) \left[\prod_{l=1}^{L-1} dh_l P(h_l) d\xi_l \bar{\pi}(\xi_l) \right] (\Omega(1) + \Omega(-1))^n \right\rangle_L \\
&\quad \times \delta \left(\tilde{h} - \frac{1}{2} \log \frac{\Omega(1)}{\Omega(-1)} \right) \Bigg\rangle_L. \tag{306}
\end{aligned}$$

ここで $n \rightarrow 0$ をとると

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \tilde{P}(\tilde{h}) &= \alpha \frac{\int Dz \left\langle L \int d\xi_L \bar{\pi}(\xi_L) \left[\prod_{l=1}^{L-1} dh_l P(h_l) d\xi_l \bar{\pi}(\xi_l) \right] \delta \left(\tilde{h} - \frac{1}{2} \log \frac{\Omega(1)}{\Omega(-1)} \right) \right\rangle_L}{\int Dz \left\langle \int \left[\prod_{l=1}^L dh_l P(h_l) d\xi_l \bar{\pi}(\xi_l) \right] \right\rangle_L} \\
&= \alpha \int Dz \left\langle L \int d\xi_L \bar{\pi}(\xi_L) \left[\prod_{l=1}^{L-1} dh_l P(h_l) d\xi_l \bar{\pi}(\xi_l) \right] \delta \left(\tilde{h} - \frac{1}{2} \log \frac{\Omega(1)}{\Omega(-1)} \right) \right\rangle_L \tag{307}
\end{aligned}$$

となる。この時、

$$\begin{aligned}
\int \tilde{P}(\tilde{h}) d\tilde{h} &= 2\alpha \int d\tilde{h} \int Dz \left\langle L \int \delta \left(\tilde{h} - \frac{1}{2} \log \frac{\Omega(1)}{\Omega(-1)} \right) d\xi_L \bar{\pi}(\xi_L) \left[\prod_{l=1}^{L-1} dh_l P(h_l) d\xi_l \bar{\pi}(\xi_l) \right] \right\rangle_L \\
&= 2\alpha \int Dz \left\langle L \int d\xi_L \bar{\pi}(\xi_L) \left[\prod_{l=1}^{L-1} dh_l P(h_l) d\xi_l \bar{\pi}(\xi_l) \right] \right\rangle_L \\
&= 2\alpha \langle L \rangle_L \int Dz = 2\alpha \frac{\rho}{\alpha} = 2\rho \tag{308}
\end{aligned}$$

となる。(303) 式を積分すると

$$\int P(h) dh = \int dh \frac{2\rho \int \cdots \int \left[\prod_{c=1}^{\rho-1} d\tilde{h}_c \tilde{P}(\tilde{h}_c) \right] \delta(h - \sum_{c=1}^{\rho-1} \tilde{h}_c)}{\int \cdots \int \prod_{c=1}^{\rho} \tilde{P}(\tilde{h}_c) d\tilde{h}_c}$$

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{2\rho \int \cdots \int \left[\prod_{c=1}^{\rho-1} d\tilde{h}_c \tilde{P}(\tilde{h}_c) \right]}{(2\rho)^\rho} \\
&= 2\rho \frac{(2\rho)^{\rho-1}}{(2\rho)^\rho} = \frac{\rho}{\rho} = 1
\end{aligned} \tag{309}$$

となり、(279) 式が満たされていることがわかる。

規格化された $\tilde{P}(\tilde{h})$ を $\hat{P}(\tilde{h})$ とおく。 $\hat{P}(\tilde{h}) = \frac{1}{2\rho} \tilde{P}(\tilde{h})$ である。

$$\begin{aligned}
\hat{P}(\tilde{h}) &= \frac{\alpha}{\rho} \int Dz \left\langle L \int \delta \left(\tilde{h} - \frac{1}{2} \log \frac{\Omega(1)}{\Omega(-1)} \right) ds_L \bar{\pi}(\xi_L) \left[\prod_{l=1}^{L-1} dh_l P(h_l) \xi_l \bar{\pi}(\xi_L) \right] \right\rangle_L \\
&= \frac{\alpha}{\rho} \int Dz \sum_{L=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho}{\alpha}\right)^L e^{-\frac{\rho}{\alpha}}}{L!} L \int \delta \left(\tilde{h} - \frac{1}{2} \log \frac{\Omega(1)}{\Omega(-1)} \right) d\xi_L \bar{\pi}(\xi_L) \left[\prod_{l=1}^{L-1} dh_l P(h_l) \xi_l \bar{\pi}(\xi_L) \right] \\
&= \int Dz \sum_{L=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho}{\alpha}\right)^{L-1} e^{-\frac{\rho}{\alpha}}}{(L-1)!} \int d\xi_L \bar{\pi}(\xi_L) \left[\prod_{l=1}^{L-1} dh_l P(h_l) \xi_l \bar{\pi}(\xi_L) \right] \delta \left(\tilde{h} - \frac{1}{2} \log \frac{\Omega(1)}{\Omega(-1)} \right).
\end{aligned} \tag{310}$$

規格化された $\hat{P}(\tilde{h})$ を用いると $P(h)$ は次式のように表される。

$$\begin{aligned}
P(h) &= 2\rho \frac{\int \cdots \int \left[\prod_{c=1}^{\rho-1} d\tilde{h}_c \hat{P}(\tilde{h}_c) 2\rho \right] \delta \left(h - \sum_{c=1}^{\rho-1} \tilde{h}_c \right)}{\int \cdots \int \left[\prod_{c=1}^{\rho} d\tilde{h}_c \hat{P}(\tilde{h}_c) 2\rho \right]} \\
&= \frac{2\rho [2\rho]^{\rho-1}}{[2\rho]^\rho} \int \cdots \int \left[\prod_{c=1}^{\rho-1} d\tilde{h}_c \hat{P}(\tilde{h}_c) \right] \delta \left(h - \sum_{c=1}^{\rho-1} \tilde{h}_c \right) \\
&= \int \cdots \int \left[\prod_{c=1}^{\rho-1} d\tilde{h}_c \hat{P}(\tilde{h}_c) \right] \delta \left(h - \sum_{c=1}^{\rho-1} \tilde{h}_c \right).
\end{aligned} \tag{311}$$

付録 G ビット誤り率

送信情報とその推定値のオーバーラップ R を計算する。 R_a は次式で定義される。

$$R_a = \frac{1}{N} \left[\frac{\sum_{\mathbf{s}_\gamma} \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{s}_a \prod_{\gamma=1}^n e^{-\beta \mathcal{H}(\mathbf{s}_\gamma)}}{\sum_{\mathbf{s}_\gamma} \prod_{\gamma=1}^n e^{-\beta \mathcal{H}(\mathbf{s}_\gamma)}} \right] \quad (312)$$

ここで、 $[\cdot]$ は $\boldsymbol{\eta}$, Ξ と \mathbf{y} についての平均を表す。したがって R_a は

$$\begin{aligned} R_a &= \frac{1}{N} \int d\boldsymbol{\eta} p(\boldsymbol{\eta}) \left(\prod_{\mu} \int dy^\mu \int d\mathbf{s}^\mu p(y^\mu | \boldsymbol{\eta}; \Xi) \right) \frac{\sum_{\mathbf{s}_\gamma} \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{s}_a \prod_{\gamma=1}^n e^{-\beta \mathcal{H}(\mathbf{s}_\gamma)}}{Z^n} \\ &= \frac{1}{N} \int d\boldsymbol{\eta} p(\boldsymbol{\eta}) \sum_{\mathbf{s}_\gamma} \left[\prod_{\gamma=1}^n p(\mathbf{s}_\gamma) \right] \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{s}_a \left[\prod_{\mu} \int dy^\mu \int d\mathbf{s}^\mu p(\mathbf{s}^\mu) p(y^\mu | \boldsymbol{\eta}; \Xi) \prod_{\gamma=1}^n p(y^\mu | \mathbf{s}_\gamma; \Xi) \right] \\ &= \frac{1}{N} \int d\mathbf{c}(\mathbf{x}) \int \left\{ \prod_{i=1}^N p(x_{i0}) \left[\prod_{\gamma=1}^n p(x_{i\gamma}) \right] d\mathbf{x}_i \right\} \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{s}_a \delta \left(\mathbf{c}(\mathbf{x}) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Theta_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \right) \\ &\quad \times \left[\frac{1}{(2\pi)^n} \int d\boldsymbol{\omega} e^{-\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \Sigma \boldsymbol{\omega}} \delta(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{1}) \bar{P}(\boldsymbol{\omega}) \right]^p \\ &= \frac{1}{N} \int d\mathbf{c}(\mathbf{x}) \frac{N}{2\pi i} d\tilde{\mathbf{c}}(\mathbf{x}) e^{-N \int \tilde{\mathbf{c}}(\mathbf{x}) \mathbf{c}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} \int \left\{ \prod_{i=1}^N p(x_{i0}) \left[\prod_{\gamma=1}^n p(x_{i\gamma}) \right] d\mathbf{x}_i e^{\Theta_i \tilde{\mathbf{c}}(\mathbf{x}_i)} \right\} \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{x}_a \\ &\quad \times \left[\frac{1}{(2\pi)^n} \int d\boldsymbol{\omega} e^{-\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \Sigma \boldsymbol{\omega}} \delta(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{1}) \bar{P}(\boldsymbol{\omega}) \right]^p \\ &= \frac{1}{N} e^{-N \int \tilde{\mathbf{c}}^{\text{RS}}(\mathbf{x}) \mathbf{c}^{\text{RS}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} \int \left\{ \prod_{i=1}^N p(x_{i0}) \left[\prod_{\gamma=1}^n p(x_{i\gamma}) \right] d\mathbf{x}_i \frac{(\tilde{\mathbf{c}}^{\text{RS}}(\mathbf{x}_i))^\rho}{\rho!} \right\} \sum_i x_{i0} x_{ia} \\ &\quad \times \left[\frac{1}{(2\pi)^n} \int d\boldsymbol{\omega} e^{-\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \Sigma \boldsymbol{\omega}} \delta(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{1}) \bar{P}(\boldsymbol{\omega}) \right]^p. \end{aligned} \quad (313)$$

$\int \left\{ \prod_{i=1}^N p(x_{i0}) \left[\prod_{\gamma=1}^n p(x_{i\gamma}) \right] d\mathbf{x}_i \frac{(\tilde{\mathbf{c}}^{\text{RS}}(\mathbf{x}_i))^\rho}{\rho!} \right\} \sum_i x_{i0} x_{ia}$ の部分を計算する。

$$\begin{aligned} &\int \left\{ \prod_{i=1}^N p(x_{i0}) \left[\prod_{\gamma=1}^n p(x_{i\gamma}) \right] d\mathbf{x}_i \frac{(\tilde{\mathbf{c}}^{\text{RS}}(\mathbf{x}_i))^\rho}{\rho!} \right\} \sum_i x_{i0} x_{ia} \\ &= \int \left\{ \prod_{i=2}^N p(x_{i0}) \left[\prod_{\gamma=1}^n p(x_{i\gamma}) \right] d\mathbf{x}_i \frac{(\tilde{\mathbf{c}}^{\text{RS}}(\mathbf{x}_i))^\rho}{\rho!} \right\} \\ &\quad \times \int p(x_{10}) \left[\prod_{\gamma=1}^n p(x_{1\gamma}) \right] d\mathbf{x}_1 \frac{(\tilde{\mathbf{c}}^{\text{RS}}(\mathbf{x}_1))^\rho}{\rho!} \left(x_{10} x_{1a} + \sum_{i=2} x_{i0} x_{ia} \right). \end{aligned} \quad (314)$$

さらに、 $\int p(x_{10}) \left[\prod_{\gamma=1}^n p(x_{1\gamma}) \right] d\mathbf{x}_1 \frac{(\tilde{\mathbf{c}}^{\text{RS}}(\mathbf{x}_1))^\rho}{\rho!} (x_{10} x_{1a} + \sum_{i=2} x_{i0} x_{ia})$ を整理する。

$$\int p(x_{10}) \left[\prod_{\gamma=1}^n p(x_{1\gamma}) \right] d\mathbf{x}_1 \frac{(\tilde{\mathbf{c}}^{\text{RS}}(\mathbf{x}_1))^\rho}{\rho!} \left(x_{10} x_{1a} + \sum_{i=2} x_{i0} x_{ia} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\rho!} \int d\mathbf{x}_1 \int \cdots \int \prod_{c=1}^{\rho} \left[d\tilde{h}_{1c} \tilde{P}(\tilde{h}_{1c}) \frac{e^{\tilde{h}_{1c} x_{10} \sum_{\gamma=1}^n x_{1a}}}{2(2 \cosh \tilde{h}_{1c})^n} \right] \left(x_{10} x_{1a} + \sum_{i=2} x_{i0} x_{ia} \right) \\
&\quad \times \frac{1}{2^{n+1}} \prod_{\gamma=0}^n [\delta(x_{1\gamma} - 1) + \delta(x_{1\gamma} + 1)] \\
&= \frac{1}{\rho! 2^{n+1}} \left[\left(\sum_{i=2} x_{i0} x_{ia} \right) \int \cdots \int \left[\prod_{c=1}^{\rho} d\tilde{h}_{1c} \tilde{P}(\tilde{h}_{1c}) \right] \frac{2^{n+1} [\cosh \sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_{1c}]^n}{2^{\rho} \prod_{c=1}^{\rho} (2 \cosh \tilde{h}_{1c})^n} \right. \\
&\quad \left. + \int \cdots \int \prod_{c=1}^{\rho} d\tilde{h}_{1c} \tilde{P}(\tilde{h}_{1c}) \int d\mathbf{x}_1 \prod_{\gamma=0}^n [\delta(x_{1\gamma} - 1) + \delta(x_{1\gamma} + 1)] x_{10} x_{1a} \frac{e^{\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_{1c} x_{10} \sum_{\gamma=1}^n x_{1\gamma}}}{2^{\rho} \prod_{c=1}^{\rho} (2 \cosh \tilde{h}_{1c})^n} \right] \\
&= \frac{1}{\rho! 2^{n+1}} \left[\left(\sum_{i=2} x_{i0} x_{ia} \right) \int \cdots \int \prod_{c=1}^{\rho} d\tilde{h}_{1c} \tilde{P}(\tilde{h}_{1c}) \frac{2^{n+1} [\cosh \sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_{1c}]^n}{2^{\rho} \prod_{c=1}^{\rho} (2 \cosh \tilde{h}_{1c})^n} \right. \\
&\quad \left. + \int \cdots \int \prod_{c=1}^{\rho} d\tilde{h}_{1c} \tilde{P}(\tilde{h}_{1c}) \int dx_{10} [\delta(x_{10} - 1) + \delta(x_{10} + 1)] x_{10} \left\{ e^{\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_{1c} x_{10}} - e^{-\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_{1c} x_{10}} \right\} \right. \\
&\quad \left. \times \left\{ e^{\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_{1c} x_{10}} + e^{-\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_{1c} x_{10}} \right\}^{n-1} \frac{1}{2^{\rho} \prod_{c=1}^{\rho} (2 \cosh \tilde{h}_{1c})^n} \right] \\
&= \frac{1}{\rho! 2^{n+1}} \left[\left(\sum_{i=2} x_{i0} x_{ia} \right) \int \cdots \int \prod_{c=1}^{\rho} d\tilde{h}_{1c} \tilde{P}(\tilde{h}_{1c}) \frac{2^{n+1} [\cosh \sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_{1c}]^n}{2^{\rho} \prod_{c=1}^{\rho} (2 \cosh \tilde{h}_{1c})^n} \right. \\
&\quad \left. + \int \cdots \int \prod_{c=1}^{\rho} \left[\frac{d\tilde{h}_{1c} \tilde{P}(\tilde{h}_{1c})}{2(2 \cosh \tilde{h}_{1c})^n} \right] \left(\left\{ e^{\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_{1c}} - e^{-\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_{1c}} \right\} \left\{ e^{\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_{1c}} + e^{-\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_{1c}} \right\}^{n-1} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left\{ e^{-\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_{1c}} - e^{\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_{1c}} \right\} \left\{ e^{-\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_{1c}} + e^{\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_{1c}} \right\}^{n-1} \right) \right] \\
&= \frac{1}{\rho! 2^{n+1}} \left[\left(\sum_{i=2} x_{i0} x_{ia} \right) \int \cdots \int \prod_{c=1}^{\rho} d\tilde{h}_{1c} \tilde{P}(\tilde{h}_{1c}) \frac{2^{n+1} [\cosh \sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_{1c}]^n}{2^{\rho} \prod_{c=1}^{\rho} (2 \cosh \tilde{h}_{1c})^n} \right. \\
&\quad \left. + \int \cdots \int \prod_{c=1}^{\rho} \left[\frac{d\tilde{h}_{1c} \tilde{P}(\tilde{h}_{1c})}{2(2 \cosh \tilde{h}_{1c})^n} \right] 2 \left\{ e^{\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_{1c}} - e^{-\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_{1c}} \right\} \left\{ e^{\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_{1c}} + e^{-\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_{1c}} \right\}^{n-1} \right] \\
&= \frac{1}{\rho! 2^{n+1}} \left[\left(\sum_{i=2} x_{i0} x_{ia} \right) \int \cdots \int \left[\prod_{c=1}^{\rho} d\tilde{h}_{1c} \tilde{P}(\tilde{h}_{1c}) \right] \frac{2^{n+1} [\cosh \sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_{1c}]^n}{2^{\rho} \prod_{c=1}^{\rho} (2 \cosh \tilde{h}_{1c})^n} \right. \\
&\quad \left. + \int \cdots \int \prod_{c=1}^{\rho} \left[\frac{d\tilde{h}_{1c} \tilde{P}(\tilde{h}_{1c})}{2(2 \cosh \tilde{h}_{1c})^n} \right] 2 \tanh \left(\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_{1c} \right) \left(2 \cosh \left(\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_{1c} \right) \right)^n \right]. \tag{315}
\end{aligned}$$

ここで $n \rightarrow 0$ をとる。

$$\begin{aligned}
&\int p(x_{10}) \left[\prod_{\gamma=1}^n p(x_{1\gamma}) \right] d\mathbf{x}_1 \frac{(\tilde{c}^{\text{RS}}(\mathbf{x}_1))^{\rho}}{\rho!} \left(x_{10} x_{1a} + \sum_{i=2} x_{i0} x_{ia} \right) \\
&= \frac{1}{\rho! 2} \left[\left(\sum_{i=2} x_{i0} x_{ia} \right) 2\rho^{\rho} + 2 \int \cdots \int \prod_{c=1}^{\rho} \left[\frac{d\tilde{h}_{1c} \tilde{P}(\tilde{h}_{1c})}{2} \right] \tanh \left(\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_{1c} \right) \right] \\
&= \frac{1}{\rho!} \left[\left(\sum_{i=2} x_{i0} x_{ia} \right) \rho^{\rho} + \int \cdots \int \prod_{c=1}^{\rho} \left[\frac{d\tilde{h}_{1c} \tilde{P}(\tilde{h}_{1c})}{2} \right] \tanh \left(\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_{1c} \right) \right]. \tag{316}
\end{aligned}$$

ゆえに (314) 式は

$$\begin{aligned} & \int \left\{ \prod_{i=1}^N p(x_{i0}) \left[\prod_{a=1}^n p(x_{ia}) \right] d\mathbf{x}_i \frac{(\tilde{c}^{\text{RS}}(\mathbf{x}_i))^\rho}{\rho!} \right\} \sum_i x_{i0} x_{ia} \\ &= N \frac{(\rho^\rho)^{N-1}}{(\rho!)^N} \int \cdots \int \prod_{c=1}^\rho \left[\frac{d\tilde{h}_c \tilde{P}(\tilde{h}_c)}{2} \right] \tanh \left(\sum_{c=1}^\rho \tilde{h}_c \right) \end{aligned} \quad (317)$$

となる。

(313) 式の $\int \tilde{c}^{\text{RS}}(\mathbf{x}) c^{\text{RS}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ の部分は、

$$\int \tilde{c}^{\text{RS}}(\mathbf{x}) c^{\text{RS}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int P(h) \tilde{P}(\tilde{h}) \frac{1}{2^{n+1}} \left(1 + \tanh h \tanh \tilde{h} \right)^n dh d\tilde{h} \quad (318)$$

より $n \rightarrow 0$ で

$$= \frac{1}{2} \int P(h) \tilde{P}(\tilde{h}) dh d\tilde{h} = \rho \quad (319)$$

となる。また (313) 式の $\frac{1}{(2\pi)^n} \int d\boldsymbol{\omega} e^{-\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \Sigma \mathbf{x}} \delta(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{1}) \bar{P}(\boldsymbol{\omega})$ の部分は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^n} \int d\boldsymbol{\omega} e^{-\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \Sigma \mathbf{x}} \delta(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{1}) \bar{P}(\boldsymbol{\omega}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{1}{\mathcal{N}^{\frac{1}{\alpha}}} \int Dz \left\langle \int \left[\prod_{l=1}^L dh_l P(h_l) d\xi_l \bar{\pi}(\xi_l) \right] \{ (\Omega(1) + \Omega(-1)) \right. \\ & \quad \left. \times \left(1 + \tanh \left(\frac{1}{2} \log \frac{\Omega(1)}{\Omega(-1)} \right) \tanh h_L \right) \right\}^n \right\rangle_L \end{aligned} \quad (320)$$

より、 $n \rightarrow 0$ で

$$= \frac{1}{\mathcal{N}^{\frac{1}{\alpha}}} \int Dz \left\langle \int \left[\prod_{l=1}^L dh_l P(h_l) d\xi_l \bar{\pi}(\xi_l) \right] \right\rangle_L = \frac{1}{\mathcal{N}^{\frac{1}{\alpha}}} \quad (321)$$

となる。 \mathcal{N} は

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= {}_p C_\rho \left(\frac{\rho}{p} \right)^\rho \left(1 - \frac{\rho}{p} \right)^{p-\rho} = \frac{p!}{\rho! (p-\rho)!} \left(\frac{\rho}{p} \right)^\rho \left(1 - \frac{\rho}{p} \right)^{p-\rho} \\ &\sim p(p-1) \cdots (p-\rho+1) \left(\frac{\rho}{p} \right)^\rho e^{-\rho} \frac{1}{\rho!} \sim \rho^\rho e^{-\rho} \frac{1}{\rho!}. \end{aligned} \quad (322)$$

$\therefore A = \left(1 - \frac{\rho}{p} \right)^{p-\rho}$ とおく。 $\log A = (p-\rho) \log \left(1 - \frac{\rho}{p} \right) \sim (p-\rho) \left(-\frac{\rho}{p} \right) = -\rho + \frac{\rho^2}{p^2} \sim -\rho$ より $\log A \sim -\rho$, $\therefore A \sim e^{-\rho}$.

以上より、 R は次式で表される。

$$\begin{aligned} R &= \frac{(\rho^\rho)^{N-1}}{(\rho!)^N} e^{-N\rho} \left(\frac{1}{\mathcal{N}^{\frac{1}{\alpha}}} \right)^p \int \cdots \int \prod_{c=1}^\rho \left[\frac{d\tilde{h}_c \tilde{P}(\tilde{h}_c)}{2} \right] \tanh \left(\sum_{c=1}^\rho \tilde{h}_c \right) \\ &= \rho^{-\rho} \int \cdots \int \prod_{c=1}^\rho \left[\frac{d\tilde{h}_c \tilde{P}(\tilde{h}_c)}{2} \right] \tanh \left(\sum_{c=1}^\rho \tilde{h}_c \right) \\ &= \frac{1}{(2\rho)^\rho} \int \cdots \int \prod_{c=1}^\rho [d\tilde{h}_c \tilde{P}(\tilde{h}_c)] \tanh \left(\sum_{c=1}^\rho \tilde{h}_c \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\rho)^\rho} \int \cdots \int \prod_{c=1}^{\rho} [d\tilde{h}_c \hat{P}(\tilde{h}_c) 2\rho] \tanh\left(\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_c\right) \\
&= \int \cdots \int \prod_{c=1}^{\rho} [d\tilde{h}_c \hat{P}(\tilde{h}_c)] \tanh\left(\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_c\right). \tag{323}
\end{aligned}$$

ビット誤り率 P_b とオーバーラップ R の関係は $P_b = \frac{1-R}{2}$ より、ビット誤り率は次のように表される。

$$P_b = \frac{\left(1 - \int \prod_{c=1}^{\rho} (d\tilde{h}_c \tilde{P}(\tilde{h}_c)) \tanh\left(\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_c\right)\right)}{2}. \tag{324}$$

付録 H 通信路容量

通信路容量を求めるために、相互情報量 $I(\mathbf{X}; \mathbf{y})$ を計算する。

$$I(\mathbf{X}; \mathbf{y}) = H(\mathbf{y}) - H(\mathbf{y}|\mathbf{X}). \quad (325)$$

まず、 $H(\mathbf{y}|\mathbf{x})(= H(\mathbf{n}))$ を計算する。

$$\begin{aligned} H(\mathbf{n}) &= - \int \left[\prod_{\mu} dn^{\mu} \right] \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \right)^p e^{-\sum_{\mu} \frac{(n^{\mu})^2}{2\sigma_0^2}} \left\{ -\frac{p}{2} \log(2\pi\sigma_0^2) - \sum_{\mu} \frac{(n^{\mu})^2}{2\sigma_0^2} \right\} \\ &= \frac{p}{2} \log(2\pi\sigma_0^2) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \right)^p \prod_{\mu} \int dn^{\mu} e^{-\frac{(n^{\mu})^2}{2\sigma_0^2}} \\ &\quad + \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \right)^p \int \left[\prod_{\mu} dn^{\mu} e^{-\frac{(n^{\mu})^2}{2\sigma_0^2}} \right] \sum_{\mu} \frac{(n^{\mu})^2}{2\sigma_0^2} \\ &= \frac{p}{2} \log(2\pi\sigma_0^2) + p \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \right)^p \int dn \frac{n^2}{2\sigma_0^2} e^{-\frac{n^2}{2\sigma_0^2}} \left[\int dne^{-\frac{n^2}{2\sigma_0^2}} \right]^{p-1} \\ &= \frac{p}{2} \log(2\pi\sigma_0^2) + \frac{p}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \int \sigma_0 dx x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= \frac{p}{2} \log(2\pi\sigma_0^2) + \frac{p}{2} \int Dxx^2 \\ &= \frac{p}{2} (1 + \log(2\pi\sigma_0^2)). \end{aligned} \quad (326)$$

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{\beta_0} \text{ より}$$

$$H(\mathbf{n}) = \frac{p}{2} (1 + \log \frac{2\pi}{\beta_0}). \quad (327)$$

次に情報エントロピー

$$H(\mathbf{y}) = - \int d\mathbf{y} \int d\boldsymbol{\eta} p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\eta}; \Xi) p(\boldsymbol{\eta}) \log_2 \{Z(\mathbf{y}; \Xi)\} \quad (328)$$

を、計算する。大システム極限で自己平均性を仮定し、1ユーザー当たりの情報エントロピー $\frac{1}{N} H(\mathbf{y})$ を計算する代わりに Ξ のランダム性について平均をとった1ユーザー当たりの情報エントロピー \hat{H} を計算する。ここで \hat{H} は、

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\Xi} \left(\frac{1}{N} H(\mathbf{y}) \right) \\ &= - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E}_{\Xi} \left(\int d\mathbf{y} \int d\boldsymbol{\eta} p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\eta}; \Xi) p(\boldsymbol{\eta}) \log_2 \{Z(\mathbf{y}; \Xi)\} \right) \end{aligned}$$

である。対数関数の底が2であることに注意する。底の変換は、 $\log_2 Z = \log Z \log_2 e$ より、 \hat{H} は、まず $\log Z$ について計算し、最後に $\log_2 e$ を掛けることで得られる。

$$- \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E}_{\Xi} \left(\int d\mathbf{y} \int d\boldsymbol{\eta} p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\eta}; \Xi) p(\boldsymbol{\eta}) \log \{Z(\mathbf{y}; \Xi)\} \right)$$

$$= - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial n} \log [Z^n] = \beta f_{RS}. \quad (329)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log [Z^n] = \alpha \mathcal{G}(c^{\text{RS}}(\mathbf{x})) - \mathcal{I}(c^{\text{RS}}(\mathbf{x})) \quad (330)$$

より、 $\mathcal{G}(c^{\text{RS}}(\mathbf{x}))$ と $\mathcal{I}(c^{\text{RS}}(\mathbf{x}))$ を n で偏微分する。

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(c^{\text{RS}}(\mathbf{x})) &= \log \int Dz \left\langle \int \left[\prod_{l=1}^L dh_l P(h_l) d\xi_l \bar{\pi}(\xi_l) \right] \{(\Omega(1) + \Omega(-1)) \right. \\ &\quad \times \left. \left(1 + \tanh\left(\frac{1}{2} \log \frac{\Omega(1)}{\Omega(-1)}\right) \tanh h_L \right) \right\}^n \Bigg\rangle_L \\ &\quad - \frac{1}{\alpha} \log \mathcal{N} - n \log(2\pi). \end{aligned} \quad (331)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathcal{G}(c^{\text{RS}}(\mathbf{x}))}{\partial n} \\ &= \frac{1}{\int Dz \left\langle \int \left[\prod_{l=1}^L dh_l P(h_l) d\xi_l \bar{\pi}(\xi_l) \right] \{(\Omega(1) + \Omega(-1)) \left(1 + \tanh\left(\frac{1}{2} \log \frac{\Omega(1)}{\Omega(-1)}\right) \tanh h_L \right) \right\}^n \Bigg\rangle_L} \\ &\quad \times \int \left\langle \int \cdots \int \left\{ (\Omega(1) + \Omega(-1)) \left(1 + \tanh\left(\frac{1}{2} \log \frac{\Omega(1)}{\Omega(-1)}\right) \tanh h_L \right) \right\}^n \right. \\ &\quad \times \log \left\{ (\Omega(1) + \Omega(-1)) \left(1 + \tanh\left(\frac{1}{2} \log \frac{\Omega(1)}{\Omega(-1)}\right) \tanh h_L \right) \right\} \left. \left[\prod_{l=1}^L dh_l P(h_l) d\xi_l \bar{\pi}(\xi_l) \right] \right\rangle_L DZ \\ &\quad - \log(2\pi) \end{aligned} \quad (332)$$

$n \rightarrow 0$ をとると、

$$\begin{aligned} &= \int \left\langle \int \cdots \int \log \left\{ (\Omega(1) + \Omega(-1)) \left(1 + \tanh\left(\frac{1}{2} \log \frac{\Omega(1)}{\Omega(-1)}\right) \tanh h_L \right) \right\} \right. \\ &\quad \times \left. \left[\prod_{l=1}^L dh_l P(h_l) d\xi_l \bar{\pi}(\xi_l) \right] \right\rangle_L DZ - \log(2\pi). \end{aligned} \quad (333)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(c^{\text{RS}}(\mathbf{x})) &= \int P(h) \tilde{P}(\tilde{h}) \frac{1}{2^{n+1}} (1 + \tanh h \tanh \tilde{h})^n dh d\tilde{h} \\ &\quad - \log \int \cdots \int \frac{1}{2^{\rho+n\rho}} \left[\prod_{c=1}^{\rho} d\tilde{h}_c \tilde{P}(\tilde{h}_c) \frac{1}{(\cosh \tilde{h}_c)^n} \right] \left\{ \cosh\left(\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_c\right) \right\}^n + \log \rho!. \end{aligned} \quad (334)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{I}(c^{\text{RS}}(\mathbf{x}))}{\partial n} &= \left(\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{2^{n+1}} \right) \int \int (1 + \tanh h \tanh \tilde{h})^n P(h) \tilde{P}(\tilde{h}) dh d\tilde{h} \\ &\quad + \frac{1}{2^{n+1}} \int \int (1 + \tanh h \tanh \tilde{h})^n \log(1 + \tanh h \tanh \tilde{h}) P(h) \tilde{P}(\tilde{h}) dh d\tilde{h} \\ &\quad - \frac{\int \cdots \int \frac{1}{2^{\rho+n\rho}} \left[\prod_{c=1}^{\rho} d\tilde{h}_c \tilde{P}(\tilde{h}_c) \right] \left\{ \frac{\cosh(\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_c)}{\prod_{c=1}^{\rho} \cosh \tilde{h}_c} \right\}^n \log \left\{ \frac{\cosh(\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_c)}{\prod_{c=1}^{\rho} \cosh \tilde{h}_c} \right\}}{\int \cdots \int \frac{1}{2^{\rho+n\rho}} \left[\prod_{c=1}^{\rho} d\tilde{h}_c \tilde{P}(\tilde{h}_c) \frac{1}{(\cosh \tilde{h}_c)^n} \right] \left\{ \cosh(\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_c) \right\}^n} \end{aligned}$$

(335)

$n \rightarrow 0$ をとると、

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}(\log 2) \int \int P(h) \tilde{P}(\tilde{h}) dh d\tilde{h} + \frac{1}{2} \int \int \log(1 + \tanh h \tanh \tilde{h}) P(h) \tilde{P}(\tilde{h}) dh d\tilde{h} \\
&\quad - \frac{\int \cdots \int \left[\prod_{c=1}^{\rho} d\tilde{h}_c \tilde{P}(\tilde{h}_c) \right] \log \left\{ \frac{\cosh(\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_c)}{\prod_{c=1}^{\rho} \cosh \tilde{h}_c} \right\}}{\int \cdots \int \left[\prod_{c=1}^{\rho} d\tilde{h}_c \tilde{P}(\tilde{h}_c) \right]} \\
&= -\rho \log 2 + \frac{1}{2} \int \int \log(1 + \tanh h \tanh \tilde{h}) P(h) \tilde{P}(\tilde{h}) dh d\tilde{h} \\
&\quad - \frac{1}{(2\rho)^{\rho}} \int \cdots \int \left[\prod_{c=1}^{\rho} d\tilde{h}_c \tilde{P}(\tilde{h}_c) \right] \log \left\{ \frac{\cosh(\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_c)}{\prod_{c=1}^{\rho} \cosh \tilde{h}_c} \right\}. \tag{336}
\end{aligned}$$

ゆえに \hat{H} は次式で表される。

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \beta f_{RS} \log_2 e = \left(-\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \alpha \mathcal{G}(c^{\text{RS}}(\mathbf{x})) - \mathcal{I}(c^{\text{RS}}(\mathbf{x})) \right\} \right) \log_2 e \\
&= \left(-\alpha \int \left\langle \int \cdots \int \log \left\{ (\Omega(1) + \Omega(-1)) \left(1 + \tanh \left(\frac{1}{2} \log \frac{\Omega(1)}{\Omega(-1)} \right) \tanh h_L \right) \right\} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \left[\prod_{l=1}^L dh_l P(h_l) d\xi_l \bar{\pi}(\xi_l) \right] \right\rangle_{DZ} \right. \\
&\quad \left. + \alpha \log 2\pi - \rho \log 2 + \frac{1}{2} \int \int \log(1 + \tanh h \tanh \tilde{h}) P(h) \tilde{P}(\tilde{h}) dh d\tilde{h} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{(2\rho)^{\rho}} \int \cdots \int \left[\prod_{c=1}^{\rho} d\tilde{h}_c \tilde{P}(\tilde{h}_c) \right] \log \left\{ \frac{\cosh(\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_c)}{\prod_{c=1}^{\rho} \cosh \tilde{h}_c} \right\} \right) \log_2 e \\
&= \left(-\alpha \int \left\langle \int \cdots \int \log \left\{ (\Omega(1) + \Omega(-1)) \left(1 + \tanh \left(\frac{1}{2} \log \frac{\Omega(1)}{\Omega(-1)} \right) \tanh h_L \right) \right\} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \left[\prod_{l=1}^L dh_l P(h_l) d\xi_l \bar{\pi}(\xi_l) \right] \right\rangle_{DZ} \right. \\
&\quad \left. + \alpha \log 2\pi - \rho \log 2 + \rho \int \int \log(1 + \tanh h \tanh \tilde{h}) P(h) \hat{P}(\tilde{h}) dh d\tilde{h} \right. \\
&\quad \left. - \int \cdots \int \left[\prod_{c=1}^{\rho} d\tilde{h}_c \hat{P}(\tilde{h}_c) \right] \log \left\{ \frac{\cosh(\sum_{c=1}^{\rho} \tilde{h}_c)}{\prod_{c=1}^{\rho} \cosh \tilde{h}_c} \right\} \right) \log_2 e. \tag{337}
\end{aligned}$$

参考文献

- [1] 石井 聡：『無線通信とデジタル変復調技術』 (2005) CQ 出版.
- [2] 西村 芳一：『無線によるデータ変復調技術』 (2002) CQ 出版.
- [3] S. Verdú: *Multiuser detection* (1988) Cambridge university press.
- [4] 田中 和之 編著：『確率的情報処理と統計力学』 (2006) サイエンス社.
- [5] T. Tanaka: “A statistical-mechanics approach to large-system analysis of CDMA multiuser detectors” *IEEE Trans. Info. Theory* **48**, No.11 (2002) 2888.
- [6] T. Tanaka: “Statistical Learning in Digital Wireless Communications” *Lecture Notes in Computer Science* **3244**, Algorithmic Learning Theory, ed. S. Ben-David, J. Case, A. Maruoka (2004) 464, Springer, Berlin.
- [7] D. Guo and S. Verdú: “Randomly spread CDMA: Asymptotic via statistical physics,” *IEEE Trans. Info. Theory* **51**, NO. 6 (2005) 1983.
- [8] A. L. Moustakas, S. H. Simon and A. M. Sengupta: “MIMO Capacity Through Correlated Channels in the Presence of Correlated Interference and Noise:A (Not so) Large N Analysis” *IEEE Trans. Info. Theory* **49**, NO. 10 (2003) 2545.
- [9] R. Müller: “Channel Capacity and Minimum Probability of Error in Large Dual Antenna Array Systems with Binary Modulation” *IEEE Trans. Signal Process.* **51**, NO. 11 (2003) 2821.
- [10] C.-K. Wen, and K.-K. Wong: “Asymptotic spectral efficiency of spatially correlated MIMO multiple-access channels with arbitrary signaling inputs for joint and separate decoding” *Proc of the IEEE Int. Symp. Information Theory*, Chicago, IL, Jun./Jul. (2004) 282.
- [11] T. Uezu, M. Yoshida, T. Tanaka, and M. Okada: “Statistical Mechanical Analysis of CDMA Multiuser Detectors AT Stability and Entropy of the RS Solution, and 1RSB Solution ” *Progress of Theoretical Physics Supplement*, NO.157 (2005) 254.
- [12] K. Nokura: “Spin glass states of the anti-Hopfield model” *J. Phys. A: Math. Gen.* **31** (1998) 7447.
- [13] H. S. Seung, H. Sompolinsky, and N. Tishby: “Statistical mechanics of learning from examples” *Phys. Rev. A* **45**, NO.8,(1992) 6056.

- [14] 西森 秀稔 : 『スピングラス理論と情報統計力学』 (1999) 岩波書店.
- [15] N. Surlas: “Spin-glass models as error-correcting codes” *Nature* **339** (1989) 693.
- [16] Y. Kabashima and D. Saad: “Statistical mechanics of error-correcting codes” *Europhys. Lett.* **45** (1999) 97.
- [17] J.R.L. de Almeida, and D.J. Thouless: “Stability of the SherringtonKirkpatrick solution of a spin glass model” *J. Phys. A: Math. Gen.* **11** (1978) 983.
- [18] W. Krauth and M. Mézard: “Storage capacity of memory networks with binary couplings” *J. Phys.* **50** (1989) 3057.
- [19] H. Nishimori: “Comment on ”Statistical mechanics of CDMA multiuser demodulation” by T. Tanaka” *Europhys. Lett.* **57**, No.2 (2002) 302.
- [20] R. S. Ellis: *Entropy, Large Deviations, and Statistical Mechanics*, ser. A series of comprehensive studies in mathematics **271** (1985) New York: SpringerVerlag.
- [21] A. C. C. Coolen, N. S. Skantzos, I. Pérez Castillo, C. J. Pérez Vicente, J. P. L. Hatchett, B. Wemmenhove and T. Nikolettopoulos: “Finitely connected vector spin systems with random matrix interactions” *J. Phys. A: Math. Gen.* **38** (2005) 8289.
- [22] G. Bilori and R. Monasson: “A single defect approximation for localized states on random lattices” *J. Phys. A: Math. Gen.* **32** (1999) 255.
- [23] G. Semerjian and L. Cugliandolo: “Sparse random matrices: the eigenvalue spectrum revisited” *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** (2002) 4837.
- [24] M. Yoshida, T. Tanaka: “Analysis of Sparsely-Spread CDMA via Statistical Mechanics” *Proc. of the IEEE Int. Symp. Information Theory, Seattle, Washington, USA, July 9-14, 2006.*