誰に当てる？ 2017 年 5 月 2 日

これは実話をもとにした、少しだけ数学に関係する話です。

登場人物を

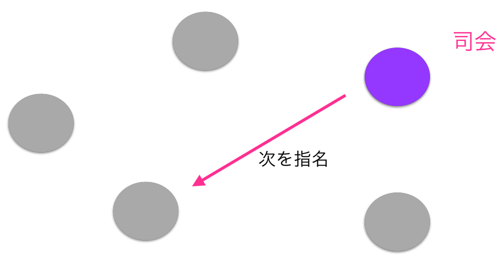
- F さん（入浴中）
- 星さん
- みかんさん
- 酒さん
- 重力さん（桜えびのかき揚げを頭に乗せた人）

の 5 人としましょう。

1

彼らの所属する ”いか焼きくらぶ” では、毎週月曜日に会議が行われています。司会は交代制で、今回の司会者が次回の司会者を指名することができます。ある時点までは、みんなランダムに次回の司会者を選んで指名していました。

どのメンバーも「司会をするのは嫌というほどではないけど、少し面倒だし、できればしたくないな」と内心思っていました。



2

ある日、重力さんは（いたずら心から？）

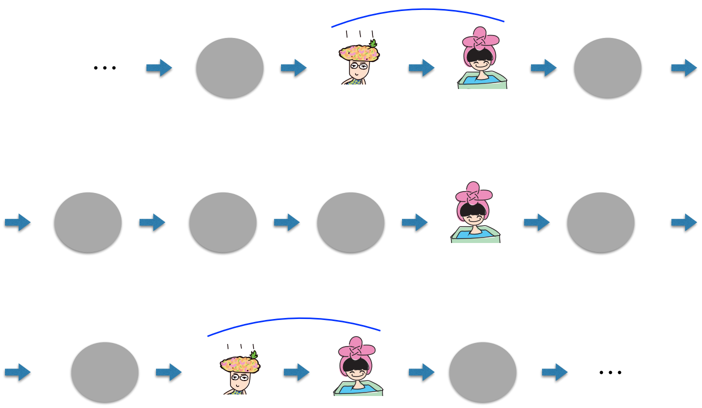
「自分が司会になったら、次の司会者には必ず F さんを指名する！」　(0.1)

と宣言しました。

どうやら重力さんは何も考えていなかったようですが、重力さんに当たれば次は必ず F さんに当たるわけで、十分長い期間で考えた場合、

（重力さんの司会の頻度）$\leq$（F さんの司会の頻度）　(0.2)

となって、司会の頻度に影響することがわかります。逆に、残りの 3 人が司会をする頻度は、重力さんから当てられなくなった分だけ低くなります。[1]



F さんはこのことに気がついて、少しカチンときました。

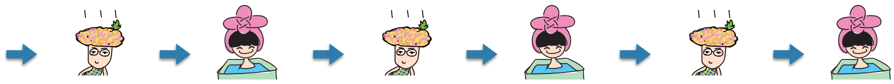
[1]適当な仮定のもとで、F さんに司会の当たる頻度は $\frac{8}{25}$、 重力さんの頻度は $\frac{1}{5}$、他の 3 人の頻度は $\frac{4}{25}$ になります。

それで、お返しにＦさんも

「じゃあ私が司会になったら、次の司会者には必ず重力を指名してやる！」 (0.3)

と宣言しました。

でも、これだと２回に１回はＦさんが司会をすることになるので、あまり良い作戦とはいえませんね。ですからこの宣言は、その場で撤回されました。



些細なことではあるけれど、気になり始めてしまったＦさんは

「司会の回数をなるべく少なくするためには、どんな戦略を取れば良いのだろう？」

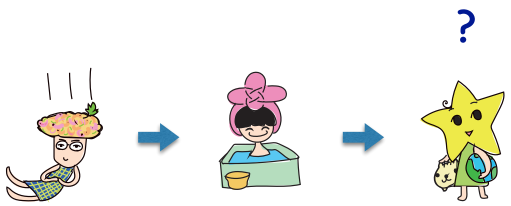
と、会議のあとで少しだけマジメに考えてみました。

３
（(以下、F の独白)）

『星さんには悪いけど、仮に私が

「もし私が司会になったら、次の司会者には必ず星さんを指名する！」 (0.4)

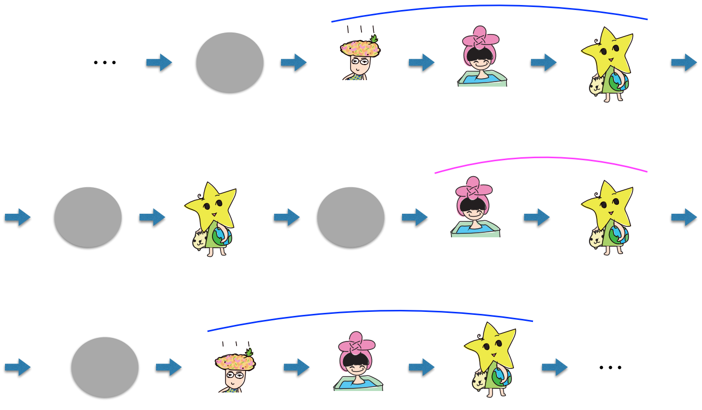
と宣言したらどうなるか考えてみよう。



まず、重力に指名が当たれば次は私、私に当たれば次は星さんに当たるから、

$$（重力の司会の頻度）\leq（F の司会の頻度）\leq（星さんの司会の頻度） \tag{0.5}$$

となることがわかる。



また、みかんさんは {星, 酒} の２人からしか指名されないけど、重力は {星, 酒, みかん} の３人から指名される可能性がある。だから、特殊な条件がない限り

$$（みかんさんの司会の頻度）\leq（重力の司会の頻度） \tag{0.6}$$

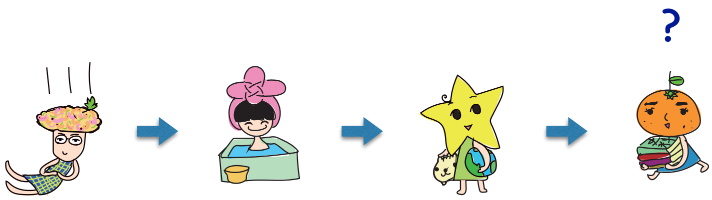
であることもわかる。当然、同じことは酒さんにも言える。

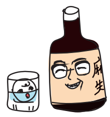
つまり、この段階で司会の当たる頻度が最も低くなり得るのは、みかんさんと酒さんだ。』

4
『さて、状況を改善するために、星さんがどうするのか想像してみよう。おそらく私がしたのと同じように、最も頻度の低い人を１人選んで、例えば

「もし私（星）が司会になったら、次の司会者には必ずみかんさんを指名する」 (0.7)

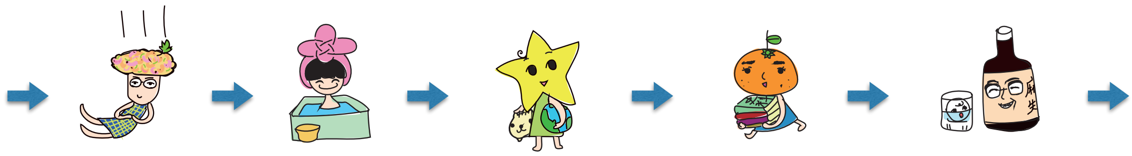
と宣言したらどうなるか、と考えてみるのではないだろうか。





このとき、みかんさんがどう行動するのかを予想するのは簡単だ。どう考えても、指名先を酒さんに固定するのが理にかなっている。小さなループで司会を回すよりも、大きなループを作る方が公平だし、自分に司会が当たる頻度も低く抑えられるからだ。

同じ理由で、酒さんは必ず重力を指名する。すると、一つの大きな輪ができる。それで結局のところ、司会は



$$\ldots \to \text{重力} \to \mathrm{F} \to \text{星} \to \text{みかん} \to \text{酒} \to \text{重力} \to \mathrm{F} \to \text{星} \to \text{みかん} \to \ldots \tag{0.8}$$

と巡回するはずだ。これは星さんにとっても理想的な結果といえる。他の選択肢も考えられるけど、みかんさんにとって一番分かりやすい状況が作れるのは、宣言 (0.4) と (0.7) の組み合わせだろう。

つまり私が (0.4) と言えば、全員が司会をする頻度を 1/5 に戻すことができる！』

(（独白ここまで）)

＊＊＊＊＊

シンプルな結論ですが、途中は少し込み入っていましたね。特に、F さんが星さんの立場になって考えている部分は、注意して読まないと論理を追うのが難しかったかも知れません。書き忘れていましたが、F さんは数学者なので、この手の考察には慣れているのです。[2]

[2] ただし、これはあくまで日常的な推論です。数学的な議論にするためには、仮定を明確にした上で、星さんに宣言 (0.7) を出すよりも良い選択肢がないことを示す必要があります。

5
だけど、心優しいFさんは「必ず星さんを指名する」と宣言することができませんでした。もし誰かが適当な判断をしなかった場合に、その人や別の人たちまで不利益を被るのが嫌だったからです。
でも、それ以前に、重力さんが自分の宣言したことを忘れてしまったので、Fさんの想像したようなことは何ひとつ起こりませんでした。

そして、仲直りにみんなで瓦そばを食べに行きました。

（おしまい）

Project

この話を数学的に記述する方法について考えてみましょう。

Further Reading

この話が好きな人は、ゲーム理論について調べてみると楽しめるかもしれません。本や解説記事を探す際には、数学よりのものと経済学よりのもので少し性格が違うことをあらかじめ知っておくと良いと思います。
書籍 [3] には、この話に少し似た雰囲気のパズルが紹介されています。

[1] 半沢英一『ナッシュのゲーム理論ー正義と競争の数学的関係ー』　日本数学会市民講演　2006 年

[2] 河野敬雄『ゲーム理論アラカルト一確率論の立場から一』　Rokko Lectures in Mathematics　ISBN: 4-907719-13-2　2003 年

[3] ウィリアム・パウンドストーン『ビルゲイツの面接試験』　青土社　2005 年

※ご意見・ご感想は coreofstem@cc.nara-wu.ac.jp まで。

Exercise（追補）

１．重力さんは偏向した比率で指名をし、重力さん以外の人は自分以外の 4 名をランダムに指名すると仮定して、重力さんに司会が当たる頻度が 1/5 であることを示しましょう。

（略解）n 回目の会議で各人が指名される確率を $P_{重力}(n)$, $P_{\mathrm{F}}(n)$, $P_{星}(n)$, $P_{みかん}(n)$, $P_{酒}(n)$ と書けば、

$$P_{重力}(n+1) = \frac{1}{4}\big(P_{\mathrm{F}}(n) + P_{星}(n) + P_{みかん}(n) + P_{酒}(n)\big) \tag{A.1}$$

が成り立ちます。つまり

$$P_{重力}(n+1) = \frac{1}{4}\big(1 - P_{重力}(n)\big) \tag{A.2}$$

これを解いて $n \to \infty$ の極限を調べることで、重力さんに司会が当たる頻度が計算できます。□

なお、$n \to \infty$ の極限が存在することを仮定すれば、式 (A.2) で $n \to \infty$ として得られる $P_{重力}(\infty)$ の方程式を解いて答えが求められます。

２．特に宣言を出していない人は自分以外の 4 名をランダムに指名すると仮定して、以下の 3 つの状況で F さんに司会が当たる頻度を計算してみましょう。
(1) 重力さんが宣言 (0.1) を出している場合。
(2) 重力さんが宣言 (0.1) を出し、F さんが宣言 (0.4) を出している場合。
(3) 重力さんが宣言 (0.1) を出し、F さんが宣言 (0.4) を出し、星さんが宣言 (0.7) を出している場合。

３．重力さんが (0.1) の宣言を出し、F さんが「私は重力以外の 3 人をランダムに当てる」と宣言したとき、星さん、みかんさん、酒さんがうまく行動して、全員の司会の頻度が 1/5 になるように調整することはできるでしょうか。

４．重力さんが (0.1) の宣言を出し、F さんが「私は重力以外の 3 人をランダムに当てる」と宣言したとき、星さん、みかんさん、酒さんが共謀して、彼らの司会の頻度を 1/5 より小さくすることはできるでしょうか。