科学の言語としての数学

自然の中の数学 1

2017年10月10日(火)　10：40〜12：10

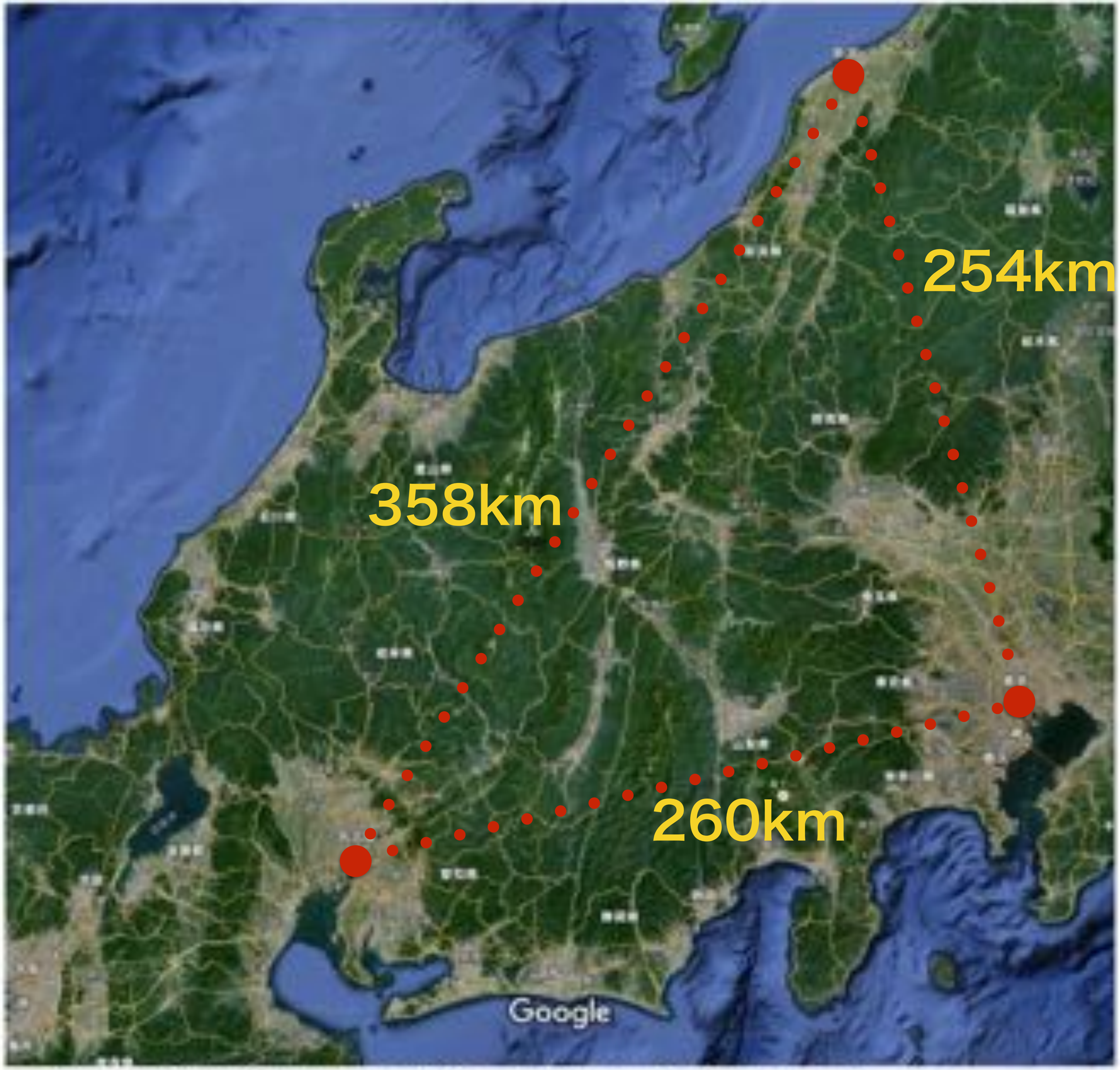
吉田信也(全学共通)

1. 最小になるのはどこだ？

［課題1］

東京，名古屋，新潟の3都市を結ぶ電力ケーブルを，下記の条件で敷設して電力を供給するとき，どのようにケーブルを敷設すれば，敷設コストは最小となるか？

- 2地点を結ぶケーブルは直線で結べるとする
- ケーブル敷設コストは，1km当たり1000万円
- ケーブルの途中どこでも分岐点を設置でき，分岐点の敷設コストは0円



画像 ©2015 Landsat, Data SIO, NOAA, U.S. Navy, NGA, GEBCO, Data Japan Hydrographic Association, 地図データ 20 km

1. 最小になるのはどこだ？

［解決法1］直観的方法

自分で図をいろいろ描いて，コストが最小となる点を探して，ほぼこの辺りという点を見つけた人もいるだろう。直観も大切な数学の力だ。

［解決法2］実験的方法

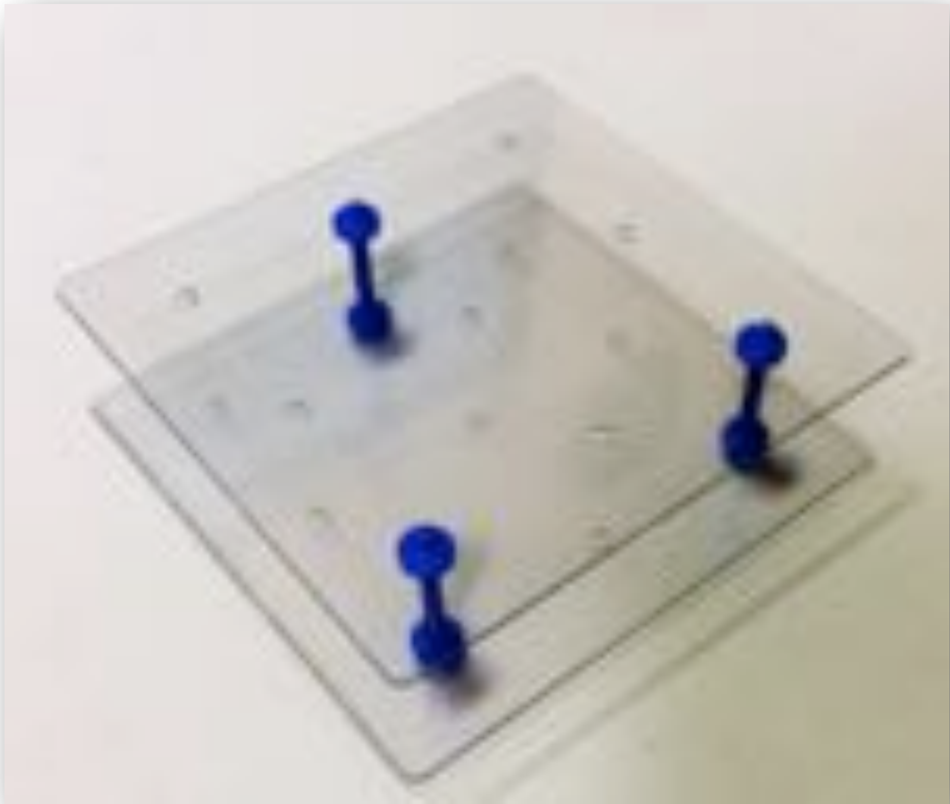
直観的に得た結果を確認する，あるいは，最初から実験的に求める点を探すためには，コンピュータが有効だ。数学用フリーウェアソフト“GeoGebra”で作成したファイル

“denryoku.ggb”

を開いて，実験してみよ。

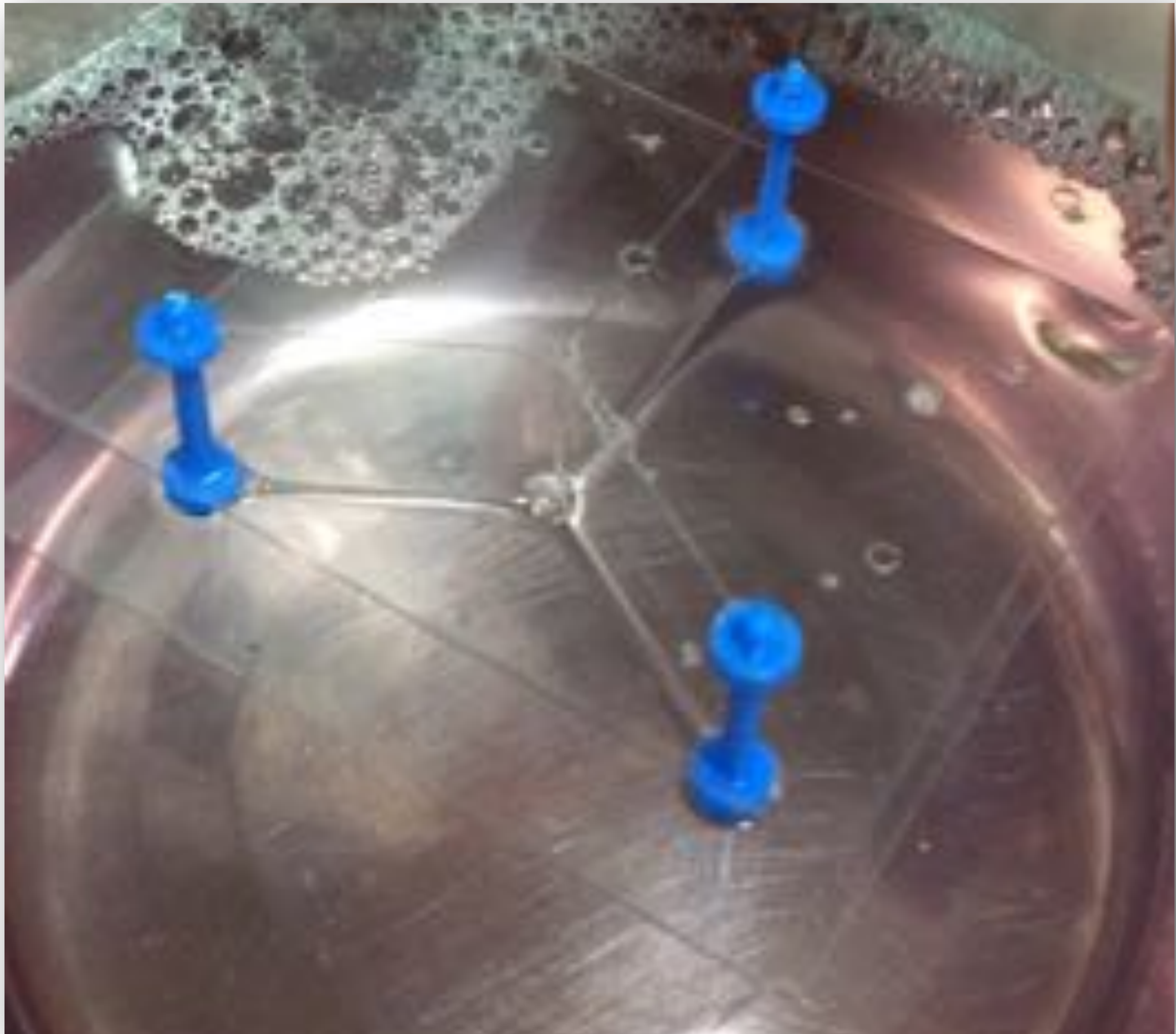
1. 最小になるのはどこだ？

［解決法3］自然が知っている方法
課題1の3地点の状況を，右図のようなプラスチックの板と棒で作る。それを，シャボン玉の液につけてそーっと引き上げると，シャボン膜はどのように張るだろう？



シャボン膜は知っている！

実験の結果は・・・



膜にかかる力は表面張力のみであり，表面積が最小になるように膜が張る。
高さは一定なので，3点を結ぶ線分の長さが最小になる。

2. 数学の世界に持ち込むと？

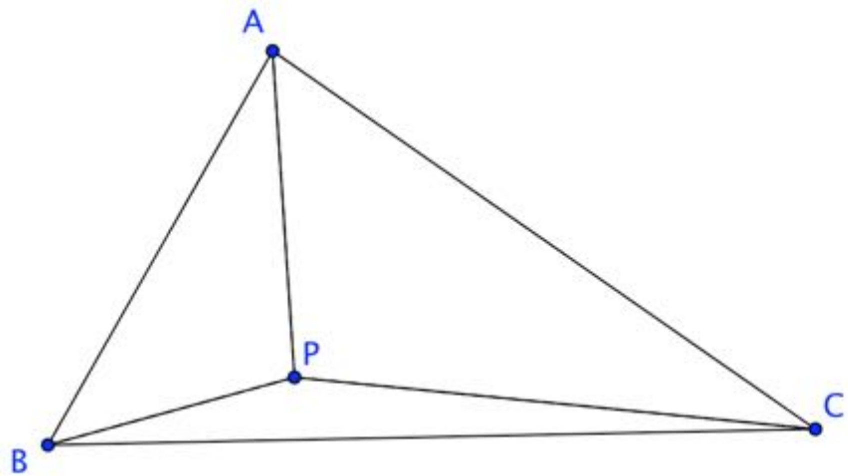
［課題2］フェルマー・シュタイナー問題

三角形ABCとその内部の点Pを考えるとき，PA＋PB＋PCを最小にする点Pはどこにあるか？

［実験結果］

∠APB＝∠BPC＝∠CPA＝120°

しかし，これが正しい保証はまだない・・・

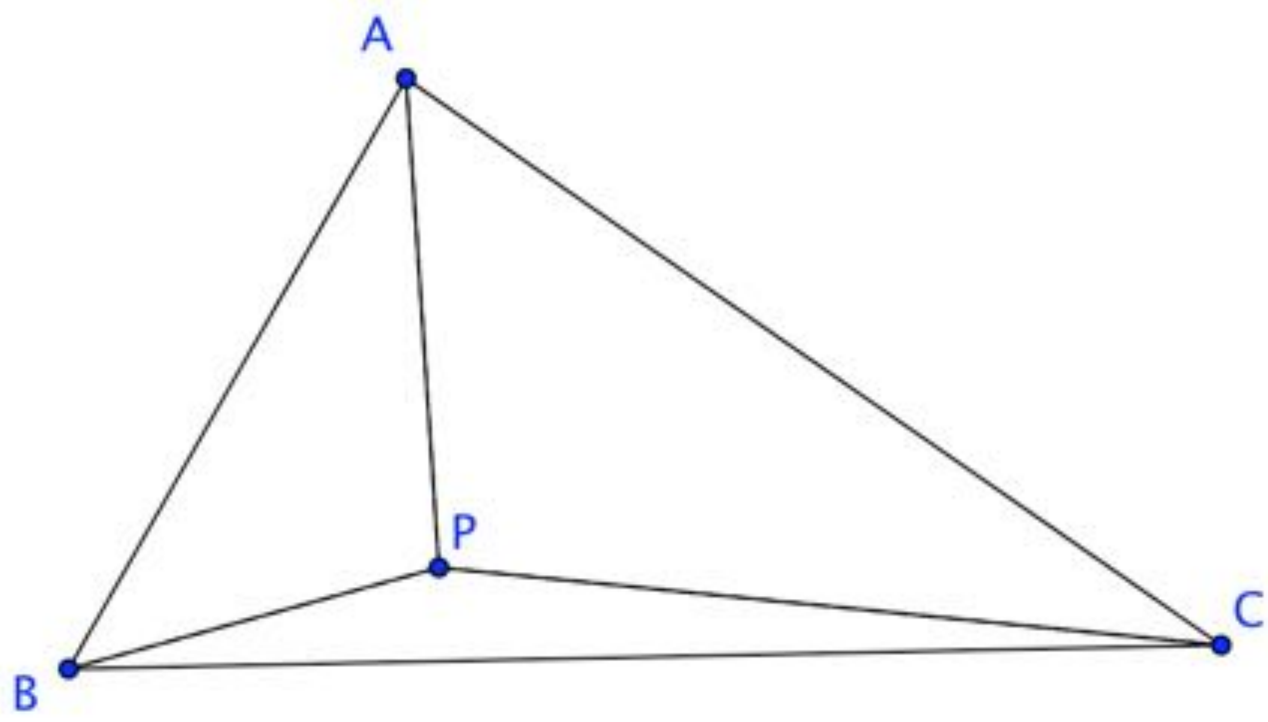


［定理1］カヴァリエリ

内角がすべて120°より小さい三角形ABCと，その内部の点Pを考える。

PA＋PB＋PCが最小

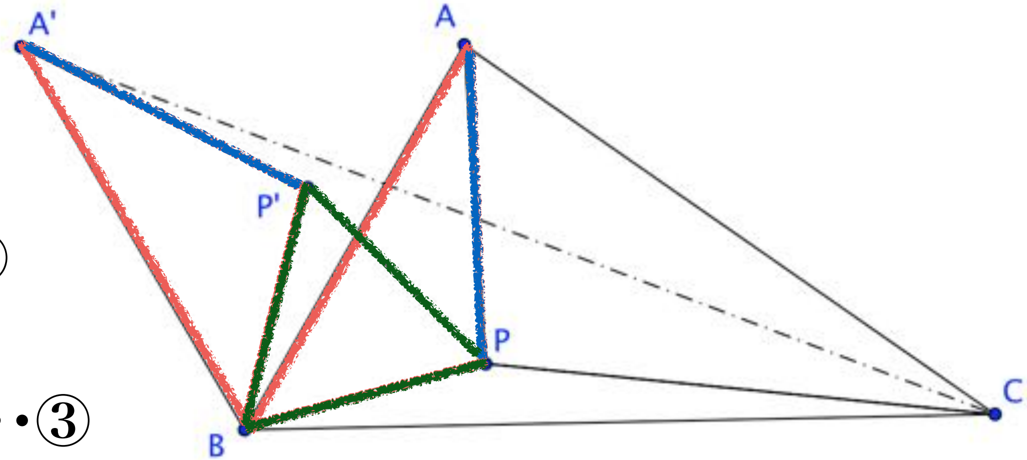
⇒　∠APB＝∠BPC＝∠CPA＝120°



(証明)　ホフマン

△APBを点Bを中心に60°回転させた三角形を△A’P’Bとすると,

$$PB = P'B,\ \angle PBP' = 60^\circ$$



より，△BPP’は正三角形となる。

よって，PB＝P’B＝P’P･･･①

また，回転移動より，PA＝P’A’･･･②

ゆえに，①，②より，

$$PA + PB + PC = A'P' + P'P + PC \cdots ③$$

ここで，折れ線A’P’PCの長さが最小となるのは,

折れ線が直線A’Cになるときである。

ゆえに③より，PA＋PB＋PCが最小となるのは，A’，P’，P，Cが同一直線上にあるときであるから,

$$\angle BPC + \angle BPP' = 180^\circ \quad \Leftrightarrow \quad \angle BPC + 60^\circ = 180^\circ$$

よって，∠BPC＝120°

同様にして，点A，Cを中心とした60°の回転を考えることにより,

$$\angle APB = \angle CPA = 120^\circ$$

よって，∠APB＝∠BPC＝∠CPA＝120°

(Q.E.D.)

3. 拡張を考えると？

［課題3］

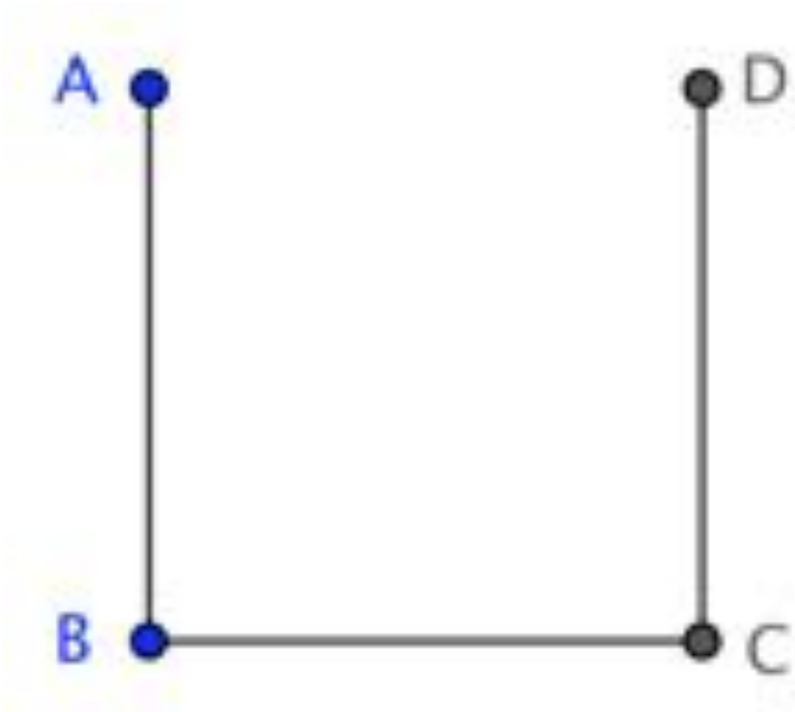
ある会社の4つの施設A，B，C，Dが，四角形ABCDが正方形をなすように位置している。4つの施設をネットワークで結びたいとき，ネットワークの距離を最小にするには，どのような結び方をすればよいか？

［解決法1］直観的方法

自分で試行錯誤しながら図をいろいろ描いて，ネットワークの最短距離を求めよ。

分岐点0個

正方形の1辺の長さを1として考える。
まず，３点を右図のように結ぶと，その長さは，
L＝AB＋BC＋CD＝3
である。



分岐点1個

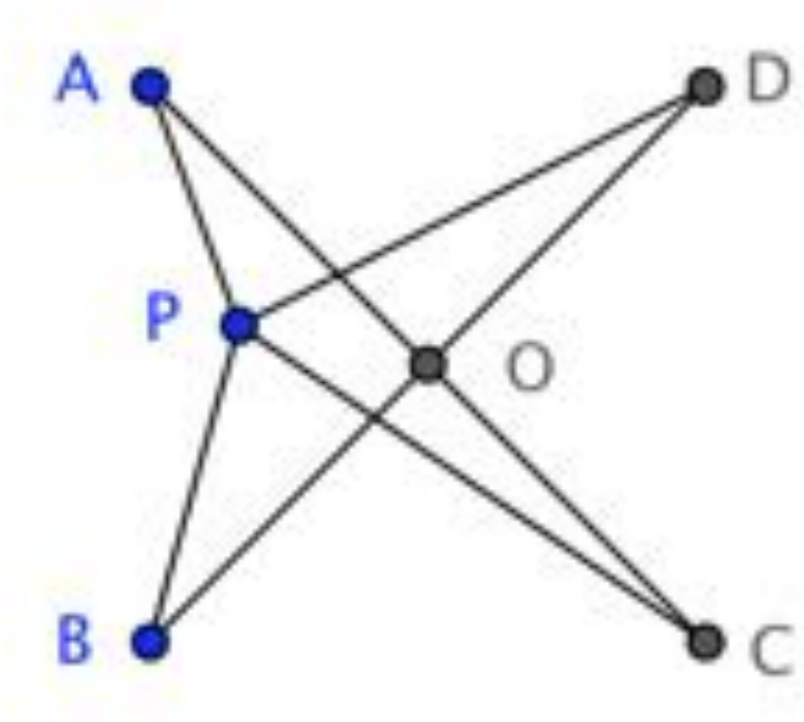
次に，分岐点を1つ作ってPとし，線分AC，BDの交点をOとすると，

$$AP+PC+BP+DP \geqq AC+BD$$

となり，等号が成立するのはP＝Oのときである。
よって，分岐点が1個のときの最短の長さは，

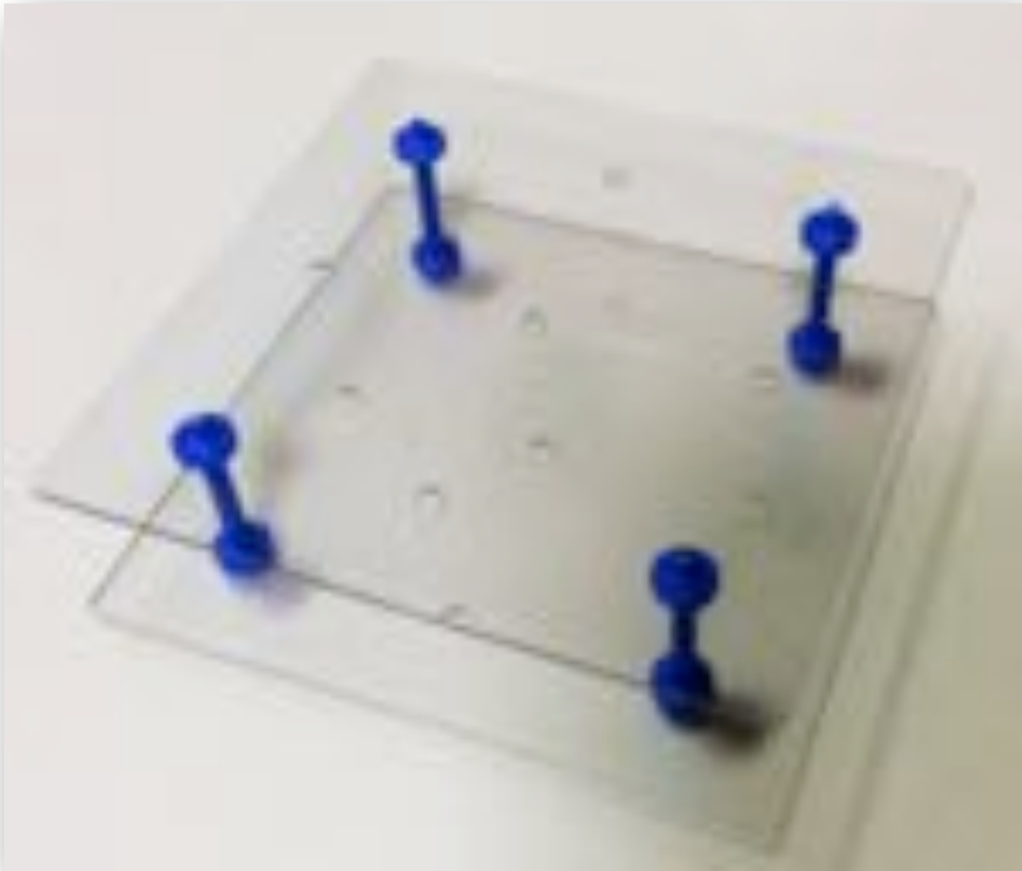
$$L=AC+BD=2\sqrt{2} \fallingdotseq 2.82<3$$

となる。



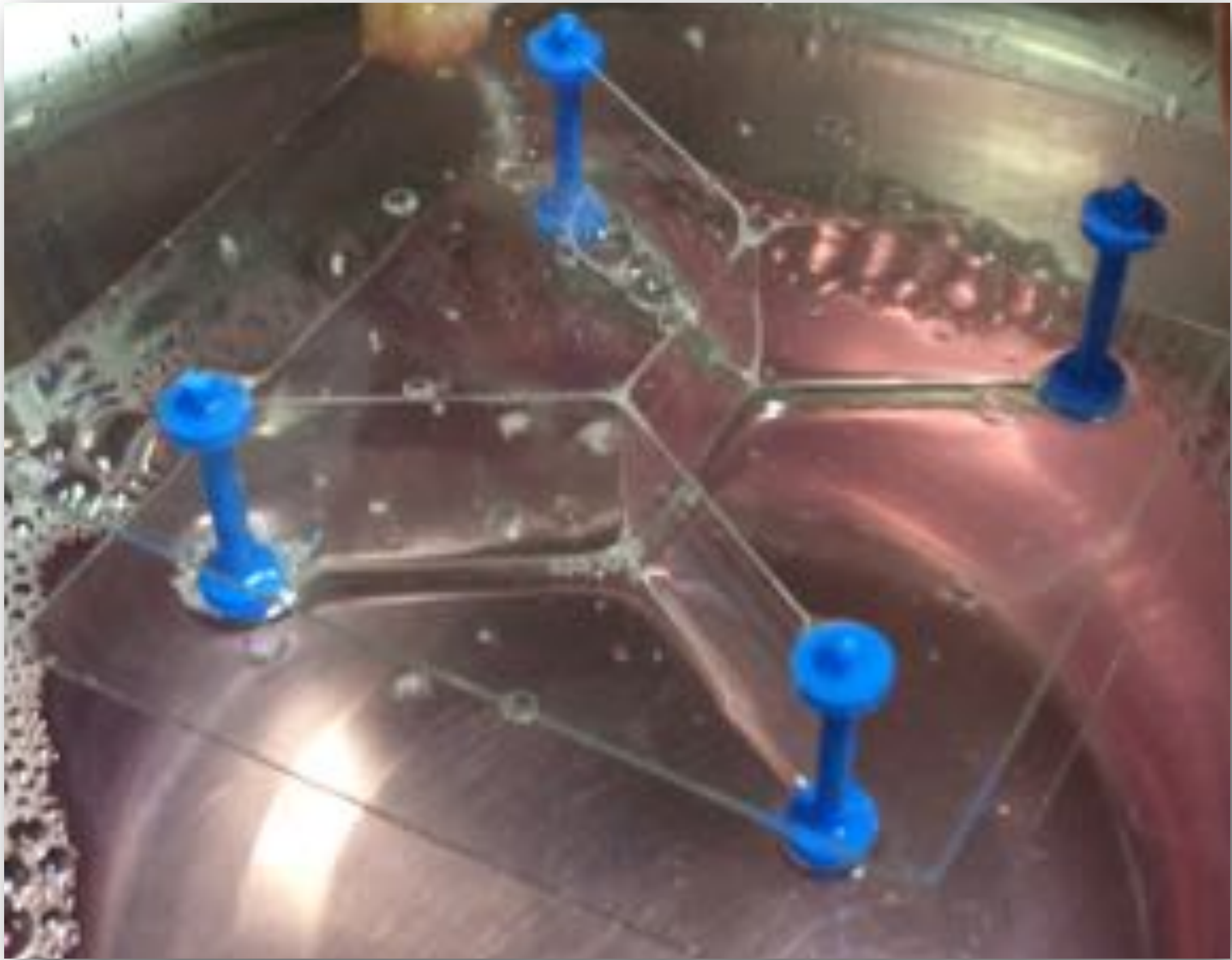
［解決法2］実験的方法
分岐点が2個の場合にネットワークの距離がより短くなるかどうか，“4PointsSteiner.ggb”を利用して実験し，考察せよ。

［解決法3］自然が知っている方法
課題2の4地点の状況を，右図のようなプラスチックの板と棒で作る。それを，シャボン玉の液につけてそーっと引き上げると，シャボン膜はどのように張るだろう？
実験の前に，右図に貴方の予想するシャボン膜を描いてみよう。



シャボン膜は知っている！

実験の結果は・・・



本日のレポート課題

［問1］ホフマンの証明における△BAA’がどのような三角形であるかを考えることにより，シュタイナー点の作図方法を述べよ。

［問2］4点のネットワークの分岐点が2個の場合，その分岐点の位置とネットワークの距離を数学的に考察せよ(右図がヒント)。

シュタイナー点の個数は？

では，シュタイナー点が3個，4個，・・・と存在すれば，さらにネットワークを短くできるのだろうか？　実は，次の定理が成立する。

［定理2］
n個の点の最短ネットワークにおいて，シュタイナー点は，最大n−2個である。
※証明は省略する。

正方形の場合はn＝4であるから，シュタイナー点が2個以下の場合を考えればよい。ゆえに，4つの点が正方形をなす場合の最短ネットワークの長さは，L＝$1+\sqrt{3}$ となる。

シュタイナー最小木問題

以上のような問題は,

　シュタイナー最小木問題

と呼ばれているが，施設設置問題の他にも，VLSI回路を設計するときの最も基本的な技術等に活用されている。